ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES
224

EXPOSÉS DE PHILOSOPHIE DES SCIENCES
Publiés sous la direction de
L. DE BROGLIE
Membre de l'Institut
Professeur à la Sorbonne
Prix Nobel

V

LA LOGIQUE
ET L'EMPIRISME INTÉGRAL

PAR

Julien PACOTTE

PARIS
HERMANN & C^ie, ÉDITEURS
6, Rue de la Sorbonne, 6
—
1935

ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

224

EXPOSÉS DE PHILOSOPHIE DES SCIENCES

Publiés sous la direction de

L. DE BROGLIE

Membre de l'Institut
Professeur à la Sorbonne
Prix Nobel

V

LA LOGIQUE
ET L'EMPIRISME INTÉGRAL

PAR

Julien PACOTTE

PARIS
HERMANN & C^{ie}, ÉDITEURS
6, Rue de la Sorbonne, 6
—
1935

DU MÊME AUTEUR

La Physique théorique nouvelle. Avec une préface de M. E. Borel, Membre de l'Académie des Sciences de Paris. 1921. (Gauthier-Villars).

La Pensée mathématique contemporaine. 1925. (Bibliothèque de Philosophie contemporaine, Alcan).

Les Méthodes nouvelles en Analyse quantique. 1929. (Blanchard).

La Pensée technique. 1931. (B. P. C., Alcan).

La Connaissance. 1934. (B. P. C., Alcan).

INTRODUCTION

On peut appeler *logique des sciences* l'ensemble coordonné des spéculations sur les principes du formel et sur l'idée de la correspondance entre le formel et le réel. La logique a toujours poursuivi ces deux objectifs. Mais en fait, on n'examine ordinairement, en logique formelle, qu'un domaine extrêmement étroit du formel ; et corrélativement, en logique inductive réelle, on étudie dans des cadres insuffisants le rapport du formel à la réalité. Les progrès de la pensée scientifique en mathématique pure, en physique théorique et, aussi bien, dans toutes les sciences naturelles, dans les sciences de l'action et en psychologie ont soulevé des questions qui, en droit, appartiennent à la logique : la logique classique ne se les approprie pas ; elles viennent se coordonner dans la logique des sciences.

Mais observons bien la nature de cette distinction. Il ne s'agit pas d'assigner à la logique un domaine plus étendu ou plus spécial ou autre. Il s'agit bien plutôt de reconnaître qu'ordinairement la logique se transmet au sein d'un courant historique où les sciences positives n'ont pas accès. C'est donc uniquement pour marquer une certaine inadaptation effective de la logique classique que nous disons logique des sciences. Au lieu d'insister sur une distinction qui rappelle seulement une inadaptation, disons plutôt que, sous l'influence d'événements scientifiques considérables, *la logique* se reconstitue dans la conscience de notre époque et qu'ainsi renouvelée elle aborde d'une manière bien caractérisée le formel, le réel et le rapport du formel au réel.

Comparée à la logique classique, la logistique représente déjà un progrès considérable. Mais elle ne peut nous satisfaire. Nous la

trouvons inadaptée, elle aussi, aux sciences. Sur le terrain formel, son œuvre — comme déjà celle de CANTOR et ses disciples concernant les ensembles infinis — est étrangère voire même opposée à l'esprit de constructivité formelle des mathématiciens, tel qu'il se révèle notamment dans le travail d'arithmétisation de l'algèbre et de l'analyse au siècle dernier et dans les démonstrations d'existence formelle des objets idéaux implicitement définis. Sur le terrain réel, il semble d'abord qu'elle n'apporte pas une doctrine spéciale. Mais au fond, elle considère ses cadres formels comme devant être remplis par le réel, si bien que ceux qui s'en inspirent ont une tendance à identifier sans plus l'élément idéal et l'élément concret. Et c'est là une attitude que l'on ne rencontre plus chez les théoriciens de la physique.

L'orientation actuelle de la logique dépend d'une idée très simple mais qui, en fait, est une conquête toute récente. A peine pressentie au siècle dernier, elle apparaît au début du siècle présent avec une clarté parfaite au point de convergence de différents courants de recherches, notamment l'arithmétisation de la mathématique pure, l'approfondissement de la structure de la théorie physique et la tendance chez les philosophes à saisir le réel, le concret, dépouillé des systèmes de concepts que nous y associons naturellement. Cette idée est l'hétérogénéité radicale du formel et du réel.

Le mot « réalité » a pris, chez les savants et chez les philosophes un sens nouveau : il désigne le donné, qualitatif et qualitativement lié. A cette réalité, les grands théoriciens de la physique, notamment POINCARÉ, MACH et DUHEM nous ont amenés en proposant le monde des sensations comme objet de la physique. C'est à elle, au fond, que pensent les physiciens contemporains quand ils revendiquent la liberté de substituer à un schème ancien, appartenant à la pensée commune ou à la science d'hier, un schème singulièrement nouveau, comme celui de la mécanique quantique. Quant aux psychologues, ils nous proposent, de même, de nous défaire de nos habitudes intellectuelles et de dépouiller la réalité des superstructures conceptuelles, soit pour étendre notre champ de vision dans le domaine de la positivité psychologique, soit en vue d'adapter finalement avec plus de justesse à cette positivité le formel. Enfin, en métaphysique, l'immense influence de BERGSON est précisément en rapport avec son idée maîtresse de l'immédiat, d'une expérience pure, intégrale, où il n'y a pas de concepts.

Une telle philosophie du réel est inconcevable sans une philosophie corrélative du formel. Si celui-ci n'est pas inhérent à celui-là, s'il n'y adhère qu'en vertu de nos habitudes intellectuelles, c'est que le formel peut se développer sur un plan propre, d'une manière indépendante et autonome. Et c'est précisément à cette conclusion qu'aboutissaient l'arithmétisation de la mathématique pure et, plus récemment, la critique des sciences mathématiques du réel, critique faite par les physiciens mathématiciens eux-mêmes. Ainsi, la pensée géométrique était analysée en un composant réel et un composant formel. Du côté du réel, c'était l'intuition sensible comme telle ou dans les données particulières où se révèle le fait physique brut : par exemple, une lecture à un appareil de mesure. Du côté du formel, on trouvait un système comme celui d'Hilbert où les symboles n'ont aucune signification intuitive sensible ; ou bien on trouvait le groupe purement arithmétique des transformations linéaires dites orthogonales portant sur trois variables continues scalaires — ou un groupe isomorphe. En mécanique, la situation était pareille. De même, dans les autres domaines de la physique. L'attention était d'autant plus vivement attirée sur l'autonomie du formel que le développement expérimental invitait à substituer aux édifices anciens, d'autres édifices. Il était clair, d'autre part, que les sciences moins mathématiques du réel tablaient de la même manière sur des systèmes formels de nature combinatoire.

Or, l'hétérogénéité du formel et du réel implique une conception caractéristique de leur rapport. Le réel désintellectualisé n'est pas comme pensaient les idéalistes une multiplicité sans lien, une poussière de sensations, un chaos d'éléments psychiques. Il est déjà lié mais les liens sont qualitatifs comme les éléments eux-mêmes : le donné est totalité qualitative et continuité qualitative. Dès lors, le formel ne peut pas exprimer un rapport réel. La correspondance du réel et du formel s'établit entre des éléments réels détachés et certains éléments des systèmes formels.

Chez les spécialistes de la logique, presque tout l'effort s'est tourné depuis un demi-siècle, vers la logique formelle. Le résultat le plus heureux des recherches entreprises de ce côté est certainement la conviction aujourd'hui unanime que logique formelle et mathématique pure forment un tout où il n'est pas possible de tracer une ligne de démarcation : la mathématique pure appartient à la logique formelle. Il ne faut peut-être pas beaucoup regretter

que cette idée se soit présentée, en fait, enveloppée d'une philosophie — la logistique — qui prétendait ne pas recourir à l'intuition de la collection et du nombre, qui faisait passer les classes logiques avant les ensembles, les définitions implicites avant les définitions explicites, l'infini avant le fini, qui négligeait, en un mot, le critère de constructivité formelle : il en est résulté des discussions et des critiques — celles de POINCARÉ notamment — qui ont affermi la vérité. Mais absorbés par le problème formel, les logiciens n'ont pas examiné avec attention la manière dont les systèmes logiques et mathématiques s'appliquent à la réalité. Ils identifiaient, dès qu'ils se tournaient vers le concret, l'élément réel avec l'élément du système formel. Or entre-temps et indépendamment, le problème du rapport entre le formel et le réel se trouvait, comme nous avons dit, éclairé voire même résolu par des savants qui n'étaient pas proprement des logiciens. Occupés en différents domaines du réel, ils voyaient sous des aspects variés cet unique problème et ils y projetaient une lumière très vive. Physiciens, psychologues et métaphysiciens précisaient la nature de l'activité intellectuelle devant la réalité sensible ou intime et les conclusions concordaient. Il fallait séparer radicalement l'édifice formel et la réalité et, par suite, examiner à nouveau la correspondance entre ces deux termes hétérogènes : la simple identification devenait inacceptable. Les logiciens envisagent aujourd'hui résolument le champ nouveau qui leur est ouvert par le réalisme issu des spéculations de BERGSON, MACH et POINCARÉ.

La tendance aujourd'hui très nette, particulièrement chez les physiciens, à considérer les systèmes formels comme un symbolisme commode peut évidemment être rapprochée du réalisme en question : elle s'accorde avec l'idée de l'hétérogénéité essentielle du réel et du formel. Mais il s'y attache généralement une certaine indifférence sur la question de la nature du symbolisme comme sur la question des caractères propres et irréductibles du réel. Cette indifférence n'est pas admissible. Dans l'intérêt même des sciences, il importe que la lumière soit faite sur ces deux questions. Les symboles sont choses réelles mises en rapport avec le formel. La manipulation des symboles, dès qu'elle est consciente, dépend de la science du formel et d'une corrélation établie entre les signes semblables et l'élément formel identique. Et l'association des signes semblables avec des objets semblables ne cesse d'être un pur

phénomène psychologique voire même spatial, que dès l'instant où l'intelligence fait correspondre aux notations, le formel, et à celui-ci, le réel.

En résumé, la logique s'élabore aujourd'hui dans l'ambiance d'un *empirisme intégral* et son esprit coïncide avec celui de la science. De là, l'intérêt incomparable que lui accorde notre époque. Elle est, pour l'esprit scientifique, une norme et un stimulant. Une norme car la méthode des sciences ne peut être que son développement. Et aussi un stimulant : voici en quel sens.

On croit généralement que l'intérêt spécifiquement scientifique se trouve vivifié par l'une ou l'autre image de l'univers, très incomplète sans doute mais qui nous en donne cependant une idée assez claire et toute intellectuelle. Ainsi déjà l'univers des forces centrales, puis l'univers de la mécanique rationnelle, puis celui de l'électrodynamique et ainsi de suite. Les circonstances historiques décident de l'image. Aujourd'hui, il semble qu'on donne la préférence à une image qui est comme une théorie physicomathématique objectivée, dont les axiômes nous échappent encore et qu'il faut découvrir : cette image vaut mieux parce que moins dogmatique. Mais au fait, l'âge de toutes ces représentations pseudo-scientifiques du monde est révolu. L'image vivifiait sans doute l'esprit scientifique mais, en retour, elle faussait souvent la direction. Le véritable stimulant de l'esprit scientifique est l'idée d'un univers intelligible. L'image ancienne ne valait que comme support ou comme symbole de cette idée. Mais elle n'en était pas digne, étant trop étroite. L'idée de l'intelligibilité de l'univers ne peut appartenir qu'à la logique ; mieux, elle est son objet propre. Et si la logique est naturellement porteuse de cette idée, elle est bien le stimulant spécifique et essentiel de l'esprit scientifique.

L'approfondissement de la logique représente ainsi un gain pour la science dans son ensemble. Ce gain se répartit entre tous les domaines du savoir scientifique. Une image métaphysique du monde suggérée par tel système formel — la mécanique rationnelle, par exemple — est sans doute un symbole pour la recherche et un exemple de précision, mais ce symbole et cet exemple valent surtout dans tel domaine utilisant des schèmes formels analogues : ailleurs, son influence est insensible. Au contraire, la logique est un noyau dont la vitalité fut sans cesse accrue par des spéculations dans les sciences les plus diverses, depuis la science des nombres jusqu'à la

science de la vie humaine. Par une convergence tenant au fond des choses, elle a tiré profit de l'avancement de toutes les sciences. Et c'est pourquoi, inversement, elle est aujourd'hui un centre capable d'éclairer toutes les régions où s'exerce l'activité scientifique. Ajoutons qu'elle donne le point de vue convenable pour toute grande synthèse : il n'y a de synthèse vraie et féconde que sur le plan gnoséologique.

Le livre présent contribuera, nous l'espérons, à rendre évidents les points qui suivent :

1° que la logique classique est inadaptée à la science ;
2° que la logistique n'échappe pas à ce grief ;
3° que la logique s'élabore aujourd'hui dans le champ des sciences et sous l'influence immédiate de leurs progrès ;
4° qu'elle se présente, dès maintenant, comme un tout bien caractérisé ;
5° qu'ainsi renouvelée elle épure et oriente la science ;
6° qu'elle est le stimulant essentiel de l'esprit scientifique ;
7° que toutes les sciences et tous les domaines de la philosophie profitent de son développement ;
8° qu'elle est, au plus haut point, comme l'histoire des sciences, un savoir propre à prévenir les effets nuisibles de la dispersion croissante de la science en spécialités ;
9° qu'elle représente le principal enseignement à tirer de l'histoire des sciences, qu'elle en est, au fond, le ressort et la justification.

Toutefois, nous ne procéderons pas à l'examen séparé de ces différents points. Notre tâche est plutôt d'exposer les bases nouvelles de la logique. C'est donc, dans la série des points que nous venons d'énumérer, le quatrième que nous viserons directement. Mais une vive lumière rejaillira, croyons-nous, sur tous les autres : les premiers seront éclairés par les remarques critiques introduites dans notre exposé ; les derniers, une fois conquise la position nouvelle, apparaîtront comme des conséquences immédiates.

Les divisions du livre sont précisément celles de la logique. Nous étudions successivement et systématiquement le formel, le réel, le rapport du formel au réel, l'ordre dans la nature. Dans chacune de ces questions, nous nous attachons au principe plutôt qu'au développement. L'ensemble représente un point

de départ pour les études spéciales, qui insensiblement passent, à mesure qu'elles s'écartent du centre, de la logique à la méthode dans les différents domaines de la science et de la philosophie. A ces études appartiennent déjà les spéculations sur les trois idées d'action, d'expérimentation et d'expression ou de symbole.

CHAPITRE PREMIER

LE FORMEL

Notre réalisme se manifeste, du côté du formel, par l'idée d'une science du formel indépendante de l'intuition du réel et par l'idée d'une constructivité formelle servant de base et de justification à la science du formel non constructif ou formel abstrait. Pour la mathématique pure, cette position fut conquise au siècle dernier par les savants qui se sont appliqués à l'arithmétisation de la science ; elle fut fortifiée vers le début de ce siècle par les théoriciens de la physique tournés vers la critique des sciences mathématiques de la nature. Pour la logique formelle, on s'efforce de même au XIX^{e} siècle, particulièrement en Angleterre, de donner au raisonnement un fondement constructif, notamment la combinaison des domaines élémentaires — les constituants — déterminés dans un ensemble quand on y distingue plusieurs domaines avec empiètement. Il s'agit de part et d'autre de l'affirmation d'une science du formel indépendante de toute métaphysique du réel et de la tendance à donner à cette science pour base l'intuition d'une constructivité formelle. Il y a là deux manifestations des mêmes idées et il importe que nous les rapprochions.

Tel sera l'objet principal de notre étude sur le formel. L'examen de la question mettra en évidence, en même temps que la nature de la logique formelle et celle de la mathématique pure, l'unité du savoir représenté par ces deux sciences et le caractère artificiel de la démarcation. D'un point de vue théorique élevé, logique formelle et mathématique pure coïncident : la logique formelle est toute la science du formel ; de même, la mathématique pure. Si l'on veut conserver ici deux sciences, il convient de les distinguer comme suit. La logique formelle est la partie fondamentale de la mathématique pure totale ; la mathématique pure est le développement de la logique formelle. Ajoutons que, passant de la logique formelle

à la logique de la connaissance du réel, on verra apparaître la coupure courante du formel sous un jour tel que la seule considération de l'idée d'induction logique proprement dite ou réelle suffirait à en démontrer l'inopportunité.

C'est encore aujourd'hui une croyance assez répandue que l'idée de nombre départage naturellement la logique et la mathématique. Les logisticiens ont tenté de s'élever au-dessus de la distinction courante des deux sciences en s'efforçant de définir le nombre. Notre point de vue est, en quelque sorte, opposé. Nous verrons surtout que la collection et le nombre sont sous-jacents à toutes les démarches de la logique. Les idées de collection et d'énumération sont déjà présentes dans les formes typiques par lesquelles, historiquement, la logique a débuté : l'appartenance d'un ensemble à un ensemble plus vaste, le groupement des prédicats. On objectera que les idées de collection et de nombre sont, du moins, assez effacées dans les démarches logiques. Mais il en va de même dans d'immenses domaines de la mathématique pure : il n'y a guère que l'arithmétique qui vise explicitement le nombre.

L'arithmétisation de la mathématique est, pour nous, la dernière étape de l'épuration de cette science. La mathématique pure ne s'est détachée que très lentement de l'intuition mathématique des phénomènes. L'algèbre des Grecs est géométrique et physique. L'analyse infinitésimale de Newton est cinématique. Après bien des efforts, l'algèbre et l'analyse paraissaient rendues indépendantes de l'intuition du monde : mais les esprits les plus fins les trouvaient encore chargées d'images et d'évidences qui les avaient servies autrefois mais dont il convenait de les affranchir. Il ne s'agissait pourtant pas de faire de la mathématique une science du formel abstrait : il s'agissait de la fonder sur du formel constructif, après quoi, le formel abstrait se rattacherait à ce formel constructif et non plus aux phénomènes. Or, le constructif formel repose sur l'intuition pure de la collection et du nombre. Et c'est pourquoi l'épuration de la mathématique fut une arithmétisation.

Toutes les extensions de l'idée de nombre sont alors envisagées indépendamment de l'intuition du monde, indépendamment aussi de toute définition implicite. Ainsi, la fraction n'est plus considérée comme un partage de l'unité ou comme un nombre qui multiplié par un entier donne un autre entier : elle est un système de deux nombres, système pour lequel on définit constructivement les opé-

rations directes. Ainsi encore le nombre imaginaire : on ne le définit plus implicitement par la propriété d'avoir un carré négatif ; on envisage le complexe imaginaire comme un système de deux nombres et l'on procède exactement comme pour la fraction. On est conduit par des procédés analogues à des nombres complexes de toutes sortes ; ceux de Kronecker, par exemple, dans le champ desquels toute équation algébrique de degré n à n racines (sans passage à la limite). On arithmétise également le continu. Dans ces démarches, il faut voir, avant tout, un désir d'édifier le formel sans appel au réel, une exigence de remplacer les définitions implicites par des définitions formelles mais constructives, enfin l'idée de systèmes formels abstraits — par exemple, les propriétés générales de l'addition et la multiplication — qui se retrouvent dans différents systèmes formels constructifs, l'idée d'isomorphisme.

L'arithmétisation de la mathématique réalise l'indépendance complète de la mathématique vis-à-vis de l'intuition des phénomènes. Or cette indépendance est précisément une idée maîtresse de la critique des sciences mathématiques de la nature. A ce point de vue on peut dire que l'arithmétisation satisfait au désir d'obtenir, en même temps qu'une mathématique exempte de toute image phénoménale, une physique pure de toute métaphysique. En d'autres termes, la mathématique pure s'arithmétise en opposition avec l'association métaphysique de l'élément physique et de l'élément mathématique.

Or, de la même manière, la logique formelle prend au siècle dernier, chez les logiciens anglais, un appui sur l'idée de collection, rompant ainsi avec la métaphysique de la substance et plus généralement avec la métaphysique inhérente aux formes du discours. A cet égard, nous pourrions dire que la logique formelle et la mathématique pure n'étaient séparées que parce qu'elles s'adossaient à deux métaphysiques différentes : celle de la substance aristotélicienne et celle de la mathématique réalisée.

Mais examinons cette transformation de la logique formelle au siècle dernier. L'œuvre la plus caractéristique est ici le calcul logique de Boole. Quelle est, à notre point de vue, sa signification ?

La ligne de partage que Boole trace à l'intérieur de la logique formelle institue une logique des jugements apodictiques et une logique des jugements complexes, comme les jugements hypothétiques et disjonctifs. Occupons-nous d'abord de la première, qu'il

appelle la logique des choses. Elle contient elle-même deux théories bien distinctes et qu'il conviendrait de développer séparément : une théorie formelle constructive et une théorie formelle abstraite. Cette dernière établit entre la logique constructive et l'algèbre des fonctions de plusieurs variables, un isomorphisme parfait. BOOLE n'ayant dit clairement ni l'indépendance de la théorie constructive ni la nature du lien qui rattache le système constructif logique au système d'algèbre classique, ses écrits devaient laisser l'esprit incertain. Les successeurs immédiats de BOOLE ont généralement préféré s'en tenir à son précurseur HAMILTON, qui avait simplement introduit les premières idées d'une logique fondée sur la constructivité formelle. Dans la suite, la logique de BOOLE fut mise à profit par les logisticiens ; ceux-ci furent, au contraire, séduits par le formalisme abstrait de la théorie et perdirent entièrement de vue sa base constructive au sens d'HAMILTON.

A notre point de vue, un système formel est constructif quand ses jugements sont une correspondance fonctionnelle établie par une opération explicite. Symboliquement, il y a de part et d'autre du signe de la correspondance, d'un côté, des signes représentant des éléments et des opérations, de l'autre, le résultat. Si deux expressions déterminent le même résultat, on place encore entre elles le signe de correspondance. Les deux opérations directes de l'arithmétique sont constructives ; les opérations inverses sont constructives aussi quand on a indiqué le moyen de construire le résultat, par exemple par des essais successifs méthodiques. Or la logique de BOOLE, dans la section qui nous intéresse en ce moment, nous présente deux opérations logiques, l'addition et la multiplication, qui sont constructives au même titre que les opérations de même nom de l'arithmétique des nombres naturels.

Envisageons un ensemble d'objets idéaux, et, dans cet ensemble total, des ensembles partiels ou domaines x, y, z et ainsi de suite. Ces ensembles partiels empiètent les uns sur les autres ou ils n'empiètent pas. A chaque ensemble x, répond un ensemble complémentaire X, formé des objets restants. Multiplier deux ensembles, c'est constituer l'ensemble des éléments appartenant à la fois aux deux. L'addition concerne des ensembles dont les produits deux à deux sont nuls. Aucun élément n'appartient à la fois aux deux ensembles : l'addition construit l'ensemble de tous les éléments des domaines en question. On a, dans ces conditions, E désignant l'ensemble total,

$$x E = x,\ xx = x,\ xX = 0,$$
$$x + X = E,\ x (y + z) = x y + x z,$$

et, à côté de ces jugements nécessaires — auxquels on peut joindre les règles de commutation et d'association — des jugements possibles, par exemple, au hasard :

$$x = x Y + y Z + z.$$

Avant de poursuivre le développement de la théorie, observons-en bien les fondements. Les ensembles partiels de BOOLE correspondent aux classes de la logique ancienne mais il y a entre les deux idées une différence essentielle : alors que la classe est généralement définie implicitement par une proposition de forme quelconque, il s'agit au contraire ici d'un ensemble E, dont tous les éléments sont bien déterminés et de domaines x, y, z et ainsi de suite, déterminés au même titre. On ne suppose rien d'autre des éléments que la propriété de pouvoir être envisagés comme appartenant à différents domaines. Tout domaine exprimé par addition et multiplication logique à partir des ensembles x, X, y, Y et ainsi de suite est un ensemble bien déterminé ; il est construit. Rien n'empêche d'attacher à chacun des éléments, des symboles x' Y' z'... notant l'appartenance de l'élément aux domaines envisagés. Alors, ces symboles sont des prédicats (positifs ou négatifs). On fixera fort bien, dans la logique générale, la place de la logique de BOOLE en disant qu'elle est une logique prédicative ou une logique des classes mais classe et prédicat sont ici entendus en un sens constructif et non abstrait ou métaphysique.

Venons maintenant au développement de la théorie. Nous avons dit que BOOLE, aussitôt posés les principes, tourne court et adopte le système arithmétique isomorphe. Restons sur le terrain primitif de la constructivité. L'idée capitale est la transformation des égalités logiques par passage des domaines qui y figurent, aux domaines ultimes appelés par BOOLE *constituants*. Etant donné l'ensemble total E et les domaines x, y, ... w, les constituants sont tous les termes du développement.

$$E = E. E. E... E = (x + X) (y + Y) ... (w + W) ;$$

pour transformer une égalité en une autre où ne figurent que des constituants, il suffit de multiplier chaque terme de l'égalité par E,

ainsi exprimé. L'égalité entraîne alors l'annulation de toute une suite de constituants car si un constituant figure dans un membre sans se trouver dans l'autre, il est nécessairement nul. En somme, l'expression de E comme somme de constituants prend en vertu de toute équation donnée une forme plus simple. Les constituants où figure x, par exemple, seront moins nombreux ; de même ceux où figure X : les expressions générales

$$x = x\,(y + Y)\,(z + Z) \ldots (w + W),$$
$$X = X\,(y + Y)\,(z + Z) \ldots (w + W)$$

seront simplifiées. Toutes les équations données vont à cette simplification, qui est en quelque sorte leur solution.

Les opérations logiques inverses, la soustraction et la division, dont l'idée se présente d'abord sous forme implicite c'est-à-dire par les propriétés imposées au résultat, reste ou quotient, doivent être définies constructivement. Les constituants jouent ici le même rôle que les unités arithmétiques. Pour la soustraction, on décompose les deux termes en leurs constituants. Si la soustraction est possible, tous les constituants du domaine soustrait se trouvent dans le premier domaine : l'opération consiste à les en supprimer. Etant donné une équation, on peut alors ramener tous ses termes dans le premier membre, comme en algèbre classique. Le principe en vertu duquel il faut annuler les constituants figurant dans un membre et non dans l'autre se transforme ici en la proposition suivante : tous les constituants qui ne disparaissent pas par destruction réciproque sont nuls. La division logique de a par b définie d'abord implicitement par un domaine c ayant avec b la partie commune a doit, comme la soustraction, être définie constructivement. Les domaines a et b sont décomposés en constituants. Tout constituant qui figure dans a et non dans b est nécessairement nul si l'opération est possible. Les constituants figurant dans b et non dans a ne figurent pas dans c. Ceux qui figurent à la fois dans a et dans b seront également dans c. Enfin, le quotient peut contenir tout constituant ne figurant ni dans a ni dans b : il reste, à cet égard, indéterminé.

Toujours du point de vue de la constructivité, nous pouvons encore introduire, dans le système de logique formelle, les symboles *zéro*, *un* et *moins un*. Ils concernent les constituants, leur absence, leur présence et leur destruction. Les propositions envisagées jusqu'ici prennent maintenant une forme nouvelle. Ainsi, pour la pro-

position concernant une équation en constituants, dont le second membre est nul : tous les constituants dont le coefficient n'est pas nul sont nuls eux-mêmes. Ainsi encore l'expression du quotient : on divise, pour chaque constituant, les coefficients haut et bas ; les constituants du quotient précédés du symbole *un sur zéro* doivent être annulés ; l'indétermination du quotient concernant les constituants absents haut et bas s'exprime justement par le symbole algébrique de l'indétermination *zéro sur zéro*. Si l'on groupe les constituants précédés du signe de l'indétermination, le symbole signifiera que le domaine total doit être pris en tout ou en partie, ou écarté complètement. L'analogie avec l'algèbre s'accuse de plus en plus mais la théorie se développe, comme on voit, constructivement, sans appel à l'algèbre et, à plus forte raison, indépendamment de l'isomorphisme découvert par Boole et que nous allons maintenant examiner.

Si l'on considère, indépendamment de l'intuition des ensembles ou domaines qui est son fondement, le système des identités et équations du calcul qui précède, on se trouve devant un système d'algèbre abstrait. Que ce système abstrait ne contient aucun germe de contradiction, nous n'en doutons pas, connaissant un système constructif qui lui correspond : celui précisément qui nous y a conduits. N'y aurait-il pas, dans le domaine des systèmes de l'algèbre ordinaire quelque système constructif répondant au même système abstrait ? En fait, le calcul des fonctions de variables ne prenant que les valeurs *zéro* et *un* est tout à fait pareil au calcul des expressions de domaines dans le calcul ci-dessus. Le système logique et le système algébrique sont isomorphes. L'isomorphisme doit être entendu ici au même sens que dans la théorie des groupes ; les deux systèmes se correspondent comme, par exemple, les différentes expressions du groupe de l'icosaèdre ou du groupe de l'égalité euclidienne, sur le terrain algébrique.

La recherche d'un système isomorphe est naturellement guidée ici par l'existence de deux opérations fondamentales, jouissant des propriétés associatives, commutatives et distributives habituelles. Mais la multiplication présente, dans le système logique, des caractères singuliers : d'abord, le carré d'un élément est cet élément même ; ensuite, le produit d'un élément par l'élément complémentaire est nul. Ces deux conditions se trouvent précisément réalisées par l'algèbre des formes algébriques, pourvu que les variables ne

prennent que les valeurs *un* et *zéro* et que deux variables complémentaires prennent ensemble à la fois les deux valeurs possibles, l'une valant l'unité quand l'autre s'annule et inversement, ce qui revient à écrire

$$X = 1\text{-}x, \quad Y = 1\text{-}y,$$

et ainsi de suite. Or toute fonction de variables x, y ne prenant que les valeurs *un* et *zéro* s'écrit sous la forme canonique

$$f(x,y) = f(1,1)xy + f(1,0)x(1\text{-}y)$$
$$+ f(0,1)(1\text{-}x)y + f(0,0)(1\text{-}x)(1\text{-}y);$$

l'expression est analogue pour un nombre quelconque de variables. Cette forme correspond justement au développement d'un domaine suivant ses constituants. L'analogie est complète si l'on se borne à considérer des fonctions qui elles-mêmes ne prennent que des valeurs a telles que

$$a\ (1\text{-}a) = 0,$$

soit les valeurs *zéro* et *plus un* : alors, tous les coefficients de la forme sont analogues à ceux qui se présentent dans le développement des domaines de l'ensemble E.

Occupons-nous maintenant de la seconde partie de la logique de Boole, celle qui concerne les jugements complexes, les rapports d'implication ou de disjonction entre jugements primaires. L'idée maîtresse de Boole est ici la conversion de la logique des propositions en la logique des domaines. Il opère cette conversion en faisant correspondre aux jugements vrais et aux jugements faux les intervalles de temps où ces jugements seraient respectivement vrais ou faux. Il est clair que l'introduction du temps et des intervalles de temps est ici artificielle. Il vaut mieux envisager les domaines où les jugements sont respectivement vrais ou faux. A notre point de vue, la logique des propositions ainsi conçue n'est acceptable que là où on lui donne un fondement constructif, c'est-à-dire dans les cas où les domaines en question sont eux-mêmes construits. Précisons.

Envisager l'ensemble complet des constituants — construits systématiquement d'après l'analyse combinatoire — et la possibilité pour chacun d'eux d'être présent ou absent, c'est laisser

place à des jugements variés concernant les distributions des présences et des absences entre tous les constituants. On peut, par exemple, convenir que toutes les distributions où figure tel constituant contiennent aussi tel autre constituant ; on exprime simplement cette circonstance en supprimant les distributions où cette condition n'est pas réalisée : on a ainsi l'expression d'un jugement hypothétique. On peut également convenir, par exemple, que dans les distributions, deux constituants spécifiés ne figurent pas dans une même distribution ; on écarte alors les distributions où les deux constituants figurent simultanément : on a ainsi l'expression d'un jugement disjonctif. On exprimerait tout aussi bien des jugements plus complexes. Ces considérations n'appartiennent pas, il est vrai, à la logique prédicative de Boole, mais en la prolongeant ainsi, nous restons fidèles à son esprit.

Or les jugements complexes s'expriment ici non plus par des égalités entre domaines d'éléments premiers — auxquels s'attachent les prédicats — mais par des égalités entre domaines dont les éléments sont eux-mêmes, chacun, une distribution des valeurs *un* et *zéro* entre tous les termes de la série complète des constituants. Appelons ces domaines des domaines seconds. Un jugement définit un domaine second où il est vrai, et un autre où il est faux. Ce sont donc des domaines de cette sorte que vise la logique seconde de Boole : elle établit un calcul de ces domaines, analogue à celui des domaines premiers et qui se trouve être, d'après ce qui précède, une logique des jugements complexes.

En résumé, la logique des prédicats et la logique des jugements complexes — hypothétiques, disjonctifs et ainsi de suite — de caractère prédicatif, toutes deux envisagées uniquement sur le plan formel — nous voulons seulement dire : sans égard à une correspondance avec le réel, le concret, le singulier — concernent des ensembles d'éléments idéaux. Elles mettent en œuvre des opérations constructives — qui font passer de plusieurs ensembles à un autre ensemble —, des ensembles également obtenus par des voies diverses, des égalités essentiellement transitives, des énumérations, une analyse combinatoire élémentaire. Ce sont là, à n'en pas douter, des démarches primordiales de l'intelligence.

Il en existe d'autres. Ce sont celles qui concernent le formel abstrait, non constructif. Les systèmes constructifs, si l'on fait abstraction de leur contenu, ont une forme abstraite, dont la

structure apparaît clairement dans le symbolisme même des opérations. La logique du formel abstrait n'est au fond que celle de l'isomorphisme des systèmes formels constructifs. En fait, le système abstrait tiré de la logique seconde de Boole joue un rôle fondamental dans la logique formelle abstraite : il représente alors la logique générale des propositions au sens de Russel.

CHAPITRE II

LE RÉEL

La logique n'a pas uniquement pour domaine les principes du formel : son objet le plus important est la correspondance entre le formel et le réel. Or, avant d'aborder le rapport, elle doit nécessairement connaître les deux termes. Nous allons donc approfondir maintenant l'idée de réalité.

Le réel est qualitatif et le prototype du qualitatif est la sensation comme telle, non comme signe. La liaison du réel est elle-même qualitative ; elle est totalité qualitative : le prototype de la totalité qualitative est la continuité qualitative en extension dans l'espace et dans le temps.

L'idée de totalité qualitative se fit jour en psychologie. On voulait saisir la positivité psychologique directement et non plus dans une représentation conceptuelle commode mais infidèle. Il ne pouvait être question, d'abord, que de la positivité éclairée par la conscience : le champ de conscience, le courant offert à la conscience. Que fallait-il penser de l'analyse et de la synthèse des états de conscience ? Pouvait-on dire, sans s'écarter du donné, que des états de conscience fragmentaires se joignent et donnent lieu, par synthèse — ou par une opération saisissable en termes formels, comme une combinaison chimique — à un état de conscience total. Il apparut de toute évidence que la positivité psychologique ne nous offrait rien de semblable. L'état de conscience supérieur n'est pas la synthèse formelle des états de conscience inférieurs : il est moins, car les éléments y sont seulement imminents et non pas présents au sens identique et absolu ; et il est plus, car, tout en portant le germe d'une multiplicité, il est pourtant chose indivisible. Le réel nous offre ici un mouvement de la totalité aux parties et des parties à la totalité : il ne s'agit pas d'une analyse et d'une synthèse, qui sont opérations intellectuelles et relèvent du jugement ; on peut

dire, avec Bergson, qu'il s'agit d'une différenciation qualitative et d'une intégration qualitative. Pour caractériser cette situation, nous disons que la positivité nous présente des totalités qualitatives. On emploie parfois dans le même sens l'expression de totalité organique : nous écartons, ici, cette désignation à raison de son ambiguïté.

Ainsi, dès qu'elle voulut saisir le champ de conscience sans l'aide des concepts, la psychologie fut amenée à une idée nouvelle et de première importance. Or, animée du même désir d'immédiatité, la métaphysique rapprochait le réel et le donné, jusqu'à les confondre. Le monde alors n'étant plus détaché de la positivité psychologique au sens large, l'idée de totalité qualitative s'étendait au réel en général. Saisis dans l'immédiat, les objets, les choses, les instruments, les organismes, les actes sont, comme les sentiments et les états de conscience, des totalités qualitatives.

En analysant les totalités qualitatives, en les réduisant à leurs éléments extrêmes, nous aboutissons à une diversité en extension dans l'espace et dans le temps. Nous nous trouvons alors devant deux types de totalités qualitatives tout à fait remarquables et qui concernent l'extensif. Ce sont : la métricité et la continuité, l'une et l'autre prises qualitativement et dans l'immédiat. C'est à dessein que nous les citons dans cet ordre, qui est inverse de celui que nous offre la théorie des espaces du point de vue riemannien. Une certaine métricité qualitative est indispensable pour saisir le continu réel. Et c'est à ce titre, du reste, que nous l'introduisons ici, car la continuité réelle sera l'objet unique de notre étude. Un examen de l'idée de réalité, dans le cadre de la logique, ne peut que signaler l'idée de totalité qualitative : elle doit par contre insister sur cette totalité qualitative singulière qu'est la continuité réelle, à cause de son rôle universel d'abord, et aussi parce qu'elle révèle une discordance du plus haut intérêt entre le réel et le formel.

Il s'attache un aspect qualitatif bien déterminé au plan et à la sphère, à la droite et au cercle, au parallélogramme, au rectangle. Or un réseau parallélipipédique et une sphère mettent sur la voie du groupe euclidien. Historiquement, la géométrie métrique s'est développée à partir de l'intuition qualitative surtout : le fondement uniquement physique et expérimental, comme application physique de la théorie de Riemann concernant la métricité attachée aux variétés arithmétiques multidimensionnelles, ne se présente

que dans la science contemporaine. Nous avons, du reste, pour la durée, une chose corrélative à l'intuition qualitative métrique de l'espace : le rythme. L'aspect de la figure formée par deux droites qui se coupent est une chose une et singulière, une totalité qualitative, qui se différencie intérieurement en une droite, une autre droite, un point d'intersection, un plan et un angle. Il ne s'agit pas là d'une simple collection ou d'une chose de même essence que les systèmes formels qu'on y fait correspondre, systèmes analytiques ou systèmes abstraits — celui d'HILBERT par exemple — qui sont conçus à partir du nombre et des collections.

Passons au second type de totalité qualitative : la continuité extensive. Nous l'avons dit, elle dérive de la métricité qualitative. Elle est l'évanouissement de la différenciation extensive quand l'intervalle devient très petit.

A la continuité extensive se rattache la continuité qualitative en extension. L'exemple le plus remarqué est le spectre lumineux continu normalement étalé : c'est que le changement y est en quelque sorte régulier et ne nous donne nulle part l'impression d'une marche très rapide ou très lente. Une continuité de même essence existe partout, dans l'intuition sensible. Mais le changement est tantôt brusque, tantôt à peine perceptible. Instinctivement, nous sommes portés à fixer notre attention sur ces cas extrêmes ; et là où il y a, en réalité, continuité qualitative, nous croyons saisir l'uniforme ou l'homogène et la coupure et le contact. Il est enssentiel d'observer que la différenciation extensive va plus loin que la différenciation de la continuité qualitative en extension. Cette circonstance donne la possibilité de substituer dans un intervalle extensif petit l'uniformité au changement continu. La continuité qualitative en extension est alors pensée comme une mosaïque. En un sens, la discontinuité disparaît si, au lieu du contact des éléments homogènes on admet une certaine superposition, un certain empiètement. Cette représentation donne lieu, précisément au système de relations par lesquelles POINCARÉ définit le continu physique : A égale B, B égale C, A différent de C. L'incompatibilité tombe pourvu que B puisse prendre deux déterminations qualitatives. En somme, on a le choix entre deux représentations schématiques de la continuité qualitative en extension : ou bien une marche en escalier, ce qui introduit la discontinuité ; ou bien des éléments avec empiètement, ce qui introduit une double détermination. Les

deux représentations peuvent être utiles : elles ne répondent pourtant pas au réel. La continuité qualitative en extension est irréductible à une multiplicité d'éléments homogènes.

Revenons au continu extensif. Envisageons plus spécialement l'espace. La continuité réelle fait intervenir l'évanouissement de la différenciation spatiale quand la distance diminue. Le point de l'espace est une totalité extensive à l'intérieur de laquelle on n'envisage plus la différenciation. L'intuition géométrique donne l'idée de droite, de points alignés, puis de points alignés équidistants. Elle donne de même l'idée de réseau cubique de points. Chaque point est alors représentable par un système de trois entiers. Toujours à raison de l'intuition géométrique, on peut passer à des points représentables par trois fractions, trois coordonnées rationnelles. A raison de l'évanouissement de la différenciation spatiale, à partir d'un dénominateur suffisamment grand, l'ensemble arithmétique rationnel à trois dimensions donnera la représentation d'un point quelconque de l'espace immédiat.

Il est essentiel de concevoir ici le nombre rationnel au sens de la mathématique arithmétisée : il ne s'agit que d'un système de deux nombres pour lesquels on définit les opérations. L'association de l'idée de fraction à l'idée de grandeur extensive, cinématique ou intensive est naturellement si forte que la séparation n'a été réalisée que très tardivement : avant l'effort général d'arithmétisation du siècle dernier, la fraction était conçue à l'aide d'un partage de l'unité, une idée dont l'origine extensive est évidente. Une coordonnée rationnelle est un système de deux nombres entiers : une petite variation d'une coordonnée signifie un certain passage d'un système de deux nombres entiers déterminés à un autre système de deux entiers. C'est en ce sens qu'il faut entendre les coordonnées rationnelles à variations plus petites, exigées par l'affinement du seuil.

Quelle est, maintenant, la signification des coordonnées incommensurables ? Les coordonnées rationnelles suffisent à noter tous les points de l'espace, vu le seuil, quel qu'il soit : c'est, au sens arithmétique, une approximation rationnelle des incommensurables qui répond au point réel. L'ensemble des nombres rationnels répond bien à la continuité extensive immédiate pourvu que l'on reconnaisse le caractère non identique du point de l'espace. L'ensemble continu de l'analyse mathématique n'apporte pas une représentation meilleure car il n'y a pas de point rigoureusement défini.

Mais il est exigé par les systèmes formels complexes que l'on attache à la métricité. Ainsi, les axiômes de la géométrie d'HILBERT ne sont démontrés compatibles que par la correspondance établie entre le système formel abstrait qu'ils représentent et le système formel constructif de la géométrie cartésienne. Et si le système de la géométrie prend une forme analytique, toutes les généralisations du nombre vont s'y rencontrer. Nous aurons ainsi des coordonnées irrationnelles, algébriques, transcendantes.

Mais ces coordonnées, comme les coordonnées rationnelles doivent être conçues arithmétiquement. Il faut surmonter l'association naturelle du continu arithmétique et du continu extensif réel : le continu intuitif. Les mathématiciens voulaient, en opérant la dissociation, épurer l'idée de continu mathématique : ils contribuaient en même temps à épurer l'idée de continuité réelle. Il n'y a pas correspondance entre le continu extensif et le continu arithmétique, avec ses incommensurables. La tendance générale à objectiver les schèmes formels utilisés dans la science du réel, à en faire une sorte de monde des intelligibles et à admettre du même coup, une intuition des intelligibles se manifeste ici dans la croyance en un continu mathématique extensif dont nous aurions l'intuition. Le continu mathématique intuitif est une illusion. Véritablement il y a, du côté de l'intellect, le continu arithmétique avec le concept de partage des rationnels en deux classes, la généralisation du nombre qui s'y rattache, les incommensurables ; et du côté du réel, la continuité extensive, la différenciation extensive évanouissante et le seuil de différenciation. Il faut éviter d'établir une corrélation entre l'idée des nombres incommensurables et l'idée de point réel : la première est purement formelle et parfaitement logique ; la seconde est alogique. Or le continu mathématique intuitif porte le germe de la confusion des deux idées.

Le but des considérations qui précèdent fut uniquement de dissiper les formations psychologiques en rapport avec l'activité intellectuelle et qui nous dérobent l'intuition immédiate du continu réel. La critique du continu mathématique intuitif était nécessaire et elle exigeait que nous envisagions l'idée de coordination de l'extensif. Or nous nous sommes tenus dans le champ de la conscience. Pouvons-nous étendre nos conclusions à la réalité physique, celle que le physicien substitue à la donnée sensible ? Et d'abord cette réalité physique existe-t-elle ?

Notre philosophie de la réalité se modèle sur le donné, sur l'immédiat. Elle n'identifie pas le réel à la sensation. Elle accepte la réalité physique selon l'intuition sensible, selon toute l'intuition sensible. Sur ce point essentiel, notre empirisme s'inspire de Bergson et non de Mach. Il est donc ouvert au réel imaginé au delà de la perception et que le physicien appelle la réalité physique. Mais il écarte une conception qui ferait de cette réalité l'objectivation pure et simple des éléments d'un système formel. Nous allons développer ces idées, surmonter l'agnosticisme de Mach, qui refuse l'examen d'une réalité ultrasensible, et tourner la métaphysique paralléliste du rapport de la sensation à l'objet.

La perception vécue nous donne elle-même, fondue en une totalité qualitative, l'image et le pressentiment d'une autre positivité spatiale, de même nature mais plus affinée. Il n'y a rien d'intellectuel dans la conscience de mieux voir en s'approchant : les images successives sont plus différenciées et acquièrent une valeur plus haute dans l'immédiat.

Or une circonstance remarquable se présente maintenant. Là où l'intuition effective fait défaut, il nous est loisible d'imaginer. Nous imaginons, par exemple, l'objet que nous perdons de vue ou qu'un écran dérobe à nos regards. Nous pouvons imaginer en utilisant une induction et il arrive que la perception confirme ce que nous imaginons. Il nous est donc possible, grâce au concept, de prolonger en quelque sorte le percept, d'évoquer une perception que le réel confirme. Nous avons reconnu, dans la perception la plus humble, une exigence d'affinement : poursuivons, dans ce sens, le développement de l'idée qui précède et nous saisirons le rôle de l'intelligence dans la représentation de la réalité physique à substituer à celle de l'intuition sensible effective.

Nous comprenons d'abord que l'intuition de l'espace se trouve améliorée quand elle subit, par le jeu de l'imagination, l'influence du système formel où tient la science de l'espace. Ce système formel est, à l'état pur, exempt de toute image sensible : c'est, par exemple, la structure du groupe des transformations dites équations des changements d'axes ; ou encore le système abstrait des postulats d'Hilbert, système ou points, droites et plans sont des éléments auxquels on n'attache, en principe, aucune représentation figurée. C'est l'intuition sensible qui a suggéré le système formel. A son tour, il provoque une image de l'espace, qui donne à l'intuition sensible

plus de fermeté, plus de précision. L'image idéale de l'espace, en rapport plus étroit avec le système logique est, au fond, ce qu'on appelle l'espace pur. L'intuition sensible s'y conforme comme nous venons de dire. C'est, au fond, ce que KANT entrevoyait quand il disait que les sensations comme données ne sont pas localisées dans l'espace pur mais qu'elles y sont localisées par l'esprit. La vérité est que la donnée est l'intuition sensible, non la sensation brute, mais que cette intuition, un peu hésitante, est améliorée par une activité imaginative en rapport avec un schème logique. A l'époque de KANT, la mathématique n'avait pas encore mis en lumière le schème en question : d'où la défaillance du philosophe sur ce point.

Un système formel déterminé — la structure d'un groupe au sens analytique — affine donc notre intuition sensible de l'espace. D'une manière analogue, les systèmes formels de certaines théories physiques nous conduisent à imaginer un monde extensif incomparablement plus affiné que celui de la perception et de la vision au microscope. Ces systèmes formels sont, par exemple, les équations de la théorie cinétique des gaz, ou celles du champ électromagnétique. Les équations pourraient représenter des phénomènes spatiaux inaccessibles mais essentiellement pareils à ceux qui nous sont révélés dans un regard jeté sur la nature : des continuités qualitatives en extension dans l'espace et dans le temps, des permanences locales dans le changement, donc des points physiques permanents, des mobiles. On imagine donc des particules et des champs d'après le contenu essentiel et universel de l'intuition sensible et d'après les équations. La valeur des schèmes pour la connaissance des phénomènes effectivement donnés nous presse de tenir l'image pour une sorte de perception.

Il faut noter ici le rôle important du schème formel des interférences des ondes sinusoïdales diffusées ou réfléchies par un réseau de points ou de plans. Avec les réseaux techniques et la lumière, les phénomènes observés indiquent le caractère ondulatoire du rayonnement et donnent la mesure de la longueur d'onde. Avec les formations lamellaires de l'ordre du micron, la gamme discontinue des colorations de la lumière naturelle réfléchie indique des stratifications monomoléculaires. Avec les cristaux et les rayons X, la distribution et l'intensité des taches de diffraction sont en rapport immédiat avec la structure du cristal en atomes. En substituant les rayons cathodiques aux rayons de Röntgen, on obtient des

taches analogues en rapport avec la structure superficielle du cristal et qui indiquent, cette fois, l'existence d'un phénomène ondulatoire associé au train d'électrons selon la conception fondamentale de la mécanique ondulatoire.

En somme, nous passons par voie de continuité de la réalité donnée immédiatement dans la perception vécue à la réalité dans le domaine des structures en atomes et en ondes. Nous devons insister sur la nature strictement empirique de l'opération intellectuelle ici en jeu. Il ne s'agit pas du tout d'une transposition du concept en percept ontologique, qui est la méthode de l'ancienne métaphysique. La physique tomberait dans une erreur de méthode si elle prétendait atteindre des éléments répondant rigoureusement à la spatialité mathématique, par exemple, des atomes ponctuels ou rigoureusement découpés dans le continu mathématique. Elle ne serait plus alors tournée vers le phénomène ou — selon l'expression de PERRIN et LANGEVIN — vers l'ultraphénomène ; elle s'égarerait dans l'illusion des intelligibles et des noumènes. Il s'agit ici d'une image, image dont le caractère visuel tend à s'effacer ou du moins perd tout intérêt ; il s'agit d'une chose de la nature d'une perception, d'une intuition sensible. KANT ne se méprenait pas quand il repoussait l'intuition nouménale mais ouvrait, par contre, son phénoménisme aux atomes physiques de DESCARTES. Il est vrai qu'il n'en reconnaissait pas l'opportunité. Mais la physique de l'ultraphénomène n'est, à son époque, rien de plus qu'une espérance. Au cours du XIX[e] siècle, elle s'affirme mais finalement résiste mal à l'énergétisme. Le XX[e] siècle l'amène, si l'on peut dire, sur le plan expérimental ; ses conquêtes sont innombrables et c'est au point que l'on s'étonne quand la mécanique quantique soulève quelque difficulté du côté de la représentation des phénomènes particulaires individuels.

CHAPITRE III

LE RAPPORT DU FORMEL AU RÉEL

Nous avons, dans les deux chapitres qui précèdent, acquis séparément une connaissance du formel et du réel qui nous en montrent l'hétérogénéité radicale. La question de leur rapport fut déjà examinée sur un point particulier mais d'intérêt primordial : celui de la correspondance entre le continu arithmétique et le continu réel. Nous sommes maintenant en état d'aborder dans toute sa généralité le problème de la correspondance entre le formel et le réel. Cette correspondance n'est pas fondée dans le réel : il n'est pas du formel objectivé. Nous devons nous en tenir au fait de l'intelligibilité, en prendre conscience dans la mesure possible.

Il y a, dans l'immédiat, non pas une véritable multiplicité mais le germe d'une multiplicité, non pas des éléments identiques à eux-mêmes mais, si l'on peut dire, une tendance des éléments à sortir de la confusion de la continuité, une tendance des totalités qualitatives à se dégager et aussi à se différencier intérieurement. Dès lors, en même temps que la diversité, la ressemblance apparaît partout : la continuité qualitative devient un tissu de ressemblances ; les totalités qualitatives paraissent partout s'imiter et se répéter. Or, dans la mesure où la réalité présente multiplicité, diversité, ressemblance, elle offre prise à l'entendement.

A une totalité qualitative plus ou moins affirmée dans la trame du réel, l'intelligence attache l'idée d'un élément de logique formelle ; à une série de totalités qualitativement semblables, elle fait répondre le même élément formel : cet élément, pensé dans son rapport au réel, est déjà le concept empirique, avec son identité en corrélation avec la simple ressemblance des choses. Ici, nous n'avons encore, du côté formel, qu'un élément. Si la similitude offerte par le réel entre deux totalités qualitatives est plus ou moins réduite à des similtudes entre leurs parties, le concept présente le schème

formel d'une combinaison. Tel est le concept empirique prédicatif.

Mais c'est vraiment un schème rudimentaire que la simple combinaison de plusieurs éléments. La science applique au réel des systèmes formels variés : le concept empirique est alors telle pièce d'un schème, lui-même appliqué à une totalité qualitative et applicable à des totalités qualitativement semblables. Ainsi, la gravitation n'est pas un concept à définir par prédicats : il concerne tel élément d'un système mathématique formel — équations de NEWTON ou équations de l'espace gravitionnel d'EINSTEIN — système mis en rapport avec une totalité qualitative et des totalités qualitatives semblables, notamment des objets astronomiques concrets, appartenant à l'histoire du monde. Ainsi encore pour la définition physique du plan : le plan est un certain invariant du groupe des transformations dites euclidiennes, ces transformations étant ellesmêmes pensées dans leur correspondance imparfaite au monde physique ; si l'on adopte la représentation cartésienne du groupe — équations des changements de coordonnées — le plan est une équation linéaire — ou le système de ses coefficients —, la variété tridimensionnelle des coordonnées arithmétiques étant mise en correspondance approximative avec l'espace physique grâce aux phénomènes physiques, notamment à la solidité physique.

Ce qui nous paraît vraiment caractéristique dans l'induction logique, c'est l'acte d'inférer l'applicabilité d'un schème formel à un cas concret. On table sur l'application effective du même schème dans une série de cas semblables au cas proposé. La similitude est ici avant tout qualitative et synthétique. Au plus simple, le schème en question est l'association de deux éléments a et b : plus précisément, le schème est celui de deux prédicats a et b, avec exclusion de (a, non b). L'application du schème a réussi dans une série de cas présentant, entres autres similitudes, la constante présence de ce qui répond, dans le concret, au caractère a : on infère que dans un cas nouveau semblable et qui présente donc le caractère a, on peut appliquer le schème en question, ce qui revient à dire que l'on trouve également le caractère b. Nous avons ici le type des inférences de coexistence et de séquence.

En présentant l'induction comme une inférence concernant l'applicabilité d'un schème formel à un cas réel, nous croyons satisfaire à plusieurs exigences : d'abord celle de dégager ce qu'il y a de vraiment essentiel dans les exemples que l'on a généralement

présentés comme des types d'induction logique ; ensuite celle de ne pas laisser à l'écart les sciences de la nature qui utilisent des schèmes formels avancés ; enfin et surtout celle de mettre en évidence, dans une opération logique aussi fondamentale que l'induction, la ligne de démarcation entre le formel et le réel, telle que l'ont tracée en toute rigueur la philosophie et la physique théorique de notre temps.

L'idée de domaine d'applicabilité des schèmes formels est fondamentale. Aucun schème ne concerne l'univers et il s'agit, pour tout système formel dont l'usage s'est établi, de déterminer autant que possible les circonstances concrètes de cet usage. Citons les circonstances d'échelle : à partir d'un certain ordre de grandeur, qu'on aille vers l'infiniment grand ou vers l'infiniment petit, les choses changent de nature et appellent des systèmes formels différents ; et ces systèmes ne sont pas nécessairement réductibles à un système unique. Citons encore les circonstances techniques de l'observation des phénomènes : la tendance à universaliser est beaucoup moins vive chez le savant qui ne perd pas de vue les bases expérimentales dans leurs caractères concrets. Ainsi, l'idée de solide physique ne tient pas dans la permanence de la forme géométrique ; elle ne tient pas davantage dans l'équilibre mécanique d'un système de points matériels ; ni dans l'idée d'une phase physicochimique au sens de la thermodynamique : elle concerne une positivité au sein de la positivité géologique et astronomique. Et l'expérimentateur ne l'oublie pas, qui choisit ses matériaux et sait leur genèse minéralogique et technique. Les circonstances définissant le domaine d'applicabilité sont innombrables. Au fond, elles débordent les concepts : elles nous ramènent à l'immédiat, où toutes les totalités lient et se lient qualitativement.

L'idée de loi est un aspect de l'induction. Elle concerne simplement les liaisons offertes à l'intérieur d'un système formel mis en rapport avec des cas réels suivant le procédé que nous venons de décrire. A notre point de vue, qui est celui du réalisme propre à notre siècle, il est essentiel d'observer que la légalité ne concerne pas directement le réel : la rigueur, l'identité, l'universalité que la pensée y a toujours associées ne sont que dans le système formel mis en œuvre. Il ne faut penser la légalité dans l'objet qu'en tenant compte de la vraie nature du rapport entre le formel et le réel.

Le passage de l'idée de légalité à celle de causalité relève générale-

ment d'une métaphysique douteuse. Il est toujours permis d'envisager, dans un schème légal, des éléments concernant deux régions du temps, l'une antérieure, l'autre postérieure. Du point de vue de la causalité efficiente on dira que les éléments antérieurs sont la cause des éléments postérieurs ; du point de vue de la causalité finale, on dira l'inverse. Mais généralement, ces expressions appellent des représentations étrangères à la légalité scientifique et que la science ne peut pas recevoir. C'est également une tendance métaphysique qui invite à réserver l'idée de causalité au cas de lois infinitésimales exprimant des actions de proche en proche dans le temps et dans l'espace. On retrouve ici encore l'accent sur l'ordre de succession mais on repousse l'influence à intervalle fini de temps ou d'espace. En somme, on prétend qu'une totalité naturelle véritable est infinitésimale en extension.

L'histoire de la philosophie et des sciences nous offre le spectacle d'illusions de toutes sortes concernant l'idée même de causalité et celle de légalité scientifique. La plupart de ces erreurs naissent d'une erreur unique où tombe naturellement tout esprit qui raisonne. Cette erreur consiste à penser le réel comme du formel réalisé. KANT a dénoncé cette illusion : c'est elle qu'il appelle dialectique de l'apparence, intuition des intelligibles, méthode de l'ancienne métaphysique. En creusant sa critique, nous entrevoyons combien il s'est approché de vérités essentielles que nous détenons grâce aux progrès de l'idée de théorie physique ; il a vu notamment que nous ne connaissons intellectuellement *a priori* que ce que nous construisons, c'est-à-dire le formel. Mais son œuvre ne nous satisfait pas ; surtout elle se rattache par des liens nombreux à la métaphysique intellectualiste, celle même qu'il critique. L'illusion qui nous présente le réel comme du formel objectivé ne fut vraiment dissipée que par le réalisme de notre temps, auquel nous avons rattaché ici le concept empirique, l'induction logique, la légalité scientifique et la causalité.

Portons maintenant notre attention sur quelques points importants de la théorie générale exposée dans les pages qui précèdent. D'abord l'induction et son incertitude.

Dans l'induction, l'applicabilité d'un schème à une totalité concrète comporte l'idée que des caractères concrets nouveaux sont joints aux caractères qui la définissaient. La liaison n'est pas nécessaire. Si le réel était du formel objectivé, l'idée d'une liaison

nécessaire pourrait se faire jour. Par exemple, dans la métaphysique ancienne, la substance est l'objectivation du schème prédicatif ; les caractères concrets sont pensés comme des prédicats objectivés : ils sont rattachés, par nature, au schème de la substance. Dès lors, la présence de tels caractères, considérés comme attributs essentiels, entraîne la présence de tels autres caractères, tenus pour attributs secondaires. Ainsi donc, dans un monde de substances au sens ancien, induction et certitude ne s'excluent pas. Il en serait de même de tel monde que l'on concevrait également comme du formel objectivé : la certitude de l'induction reposerait, ici encore, sur une intuition intellectuelle. Mais si l'on rejette l'intuition intellectuelle et à plus forte raison si l'on ne tient pas l'univers comme la réalisation d'un système formel, l'induction est essentiellement douteuse. Induction et certitude absolue sont deux idées incompatibles. L'induction est plus ou moins probable.

Nous devons éviter d'assimiler la probabilité d'une induction à la probabilité mathématique. La première concerne notre incertitude concernant l'applicabilité d'un schème. La seconde concerne au contraire l'application d'un schème d'une nature spéciale. Dans la mathématique des probabilités, le schème formel concerne un ensemble fondamental, mathématiquement construit et le dénombrement relatif des éléments de cet ensemble satisfaisant à telle condition, les cas favorables. L'application de ce schème au réel vaut dans des domaines concrets bien spécifiés : jeux de hasard, statistiques sociales, phénomènes thermiques. Le dénombrement relatif concerne, du côté du réel, un ensemble fondamental supposé assez grand : c'est l'expérience qui fixe l'ordre de grandeur de cet ensemble. La correspondance du formel au réel est ici l'égalité approximative d'un dénombrement relatif mathématiquement déduit et d'un dénombrement relatif statistique. Il s'agit là, en toute rigueur, de l'application d'un schème formel. L'application prévue dans l'induction logique en général se pose ici comme pour tout autre schème. L'idée de rattacher la probabilité de l'induction à la probabilité mathématique résulte donc, selon nous, d'une confusion : la probabilité de l'induction est une idée de logique générale ; la probabilité mathématique est une forme toute particulière de la légalité phénoménale.

Pour saisir la cause psychologique de cette confusion, nous devons observer que la probabilité mathématique n'est pas toujours prise

au sens scientifique de loi statistique. Au lieu de la considérer comme une correspondance entre un dénombrement relatif dans un ensemble mathématiquement construit et un dénombrement relatif dans un ensemble empiriquement donné, on l'envisage couramment comme une caractéristique attachée au cas favorable pour une épreuve unique. Le probabilité mathématique acquiert ainsi, à côté de la signification objective, qui concerne essentiellement un ensemble de base assez grand, une signification subjective, concernant l'espoir que telle épreuve unique, concrète, singulière, sera favorable. Et en fait, cette seconde signification, que nous appelons ici subjective, est généralement rattachée à une sorte de métaphysique de la probabilité : au système formel, avec son ensemble fondamental d'éléments de même poids, on fait correspondre je ne sais quelle relation mystérieuse entre l'idée de cas favorable et une épreuve concrète unique.

Cette dernière circonstance et le caractère d'abord étrange de la loi statistique ont fait que, très généralement, on a tenu pour fondamentale la signification que nous appelons ici subjective et, pour dérivée, celle que nous appelons objective. A ce point de vue, la fréquence des cas favorables dériverait de leur probabilité essentielle plus élevée. Heureusement, notre époque se dégage de cette métaphysique, notamment à la faveur des réflexions suggérées par les lois statistiques de la mécanique quantique : la probabilité mathématique est un type de loi des phénomènes, une loi régissant certains phénomènes où interviennent les grands nombres ; la signification subjective attachée à une épreuve est secondaire. La clarté se fait ainsi notamment dans l'interprétation du théorème de Bernouilli. La manière habituelle de l'interpréter prouve assez que l'on part généralement de la signification que nous avons appelée subjective. On tient ici la probabilité mathématique pour une caractéristique du cas favorable abstrait en relation avec une épreuve concrète singulière. D'autre part, on tient la probabilité infiniment voisine de l'unité pour une certitude. Dans ces conditions le théorème fait naturellement passer de la signification initiale de la probabilité mathématique à sa signification statistique. L'importance pratique accordée au théorème de Bernouilli rend manifeste que, généralement, on attache immédiatement à la probabilité mathématique l'idée d'une mesure de notre état d'incertitude concernant ce que réserve une épreuve unique, fût-elle com-

plexe et non l'idée d'une loi statistique. La série des épreuves répétées est une épreuve supérieure unique et la probabilité, au sens subjectif, se rapprochant, ici, de l'unité, devient comme une certitude. Cette interprétation n'est pas essentielle. Objectivement, la probabilité qui est au point de départ est déjà statistique : elle concerne déjà un ensemble d'épreuves. La probabilité calculée pour une série d'épreuves répétées concerne un ensemble très grand de pareilles séries, donc une statistique dans un ensemble fondamental plus complexe et plus vaste. Le calcul de Bernouilli, envisagé comme schème applicable aux faits, conduit d'une statistique à une autre statistique et non d'une signification de la probabilité à une autre.

Nous ne repoussons pas la signification subjective de la probabilité : nous la tenons pour secondaire. Quoi qu'il en soit, c'est à raison de cette signification subjective que l'on a pu confondre la probabilité de l'induction et la probabilité mathématique. Mais encore qu'il s'agisse bien cette fois-ci de part et d'autre d'un état subjectif, il existe encore une différence essentielle entre les deux termes. Dans le cas de la probabilité mathématique au sens subjectif, la probabilité concerne une épreuve unique. Or celle-ci précisément est telle qu'on n'y applique aucun schème légal : on n'envisage pas la loi d'apparition du phénomène individuel. Mais alors comment assimiler l'induction, qui concerne la convenance d'un schème à un cas concret et la probabilité mathématique, dans sa signification subjective, qui concerne un cas concret pour lequel est écartée l'idée d'un schème ? La confusion est évidente. On ne peut parler, sans contradiction, d'une probabilité mathématique de l'induction logique.

Il reste cependant que la probabilité mathématique interprétée subjectivement et la probabilité de l'induction concernent l'une et l'autre un degré de croyance en rapport avec la fréquence de la réussite. Le fondement de l'interprétation subjective de la probabilité mathématique est, selon nous, sa signification statistique. Le schème formel, avec son ensemble fondamental mathématiquement construit de cas possibles ne peut engendrer une croyance raisonnable plus ou moins vive dans la réalisation d'un cas favorable, qu'à raison de son applicabilité aux phénomènes statistiques. C'est toujours la fréquence statistique qui est le fondement de l'interprétation subjective de la probabilité mathématique : c'est

de même une certaine fréquence de l'applicabilité effective d'un schème quelconque qui fonde notre croyance plus ou moins vive en l'applicabilité de ce schème à un cas concret nouveau semblable. Il ne s'agit plus ici à proprement parler de statistique : en tout cas, l'idée d'une loi statistique doit être repoussée en cette matière, ainsi que nous l'avons expliqué. Pour ce qui est de l'analyse psychologique de l'influence de la fréquence sur le degré de la croyance, notre époque n'a guère dépassé la philosophie de HUME.

Nous ne pouvons pas nous étendre davantage sur cette question capitale de la probabilité de l'induction logique : il nous suffit d'avoir tenté de jeter la plus vive lumière sur le principe. Nous passerons donc à un second point : l'universalité de l'activité scientifique ou le progrès illimité de la science dans toutes les directions. Il s'agit de savoir si le déterminisme pratiquement parfait auquel nous atteignons notamment dans le domaine des machines et autres dispositifs techniques est promis à la science de l'avenir dans des domaines comme le monde atomique, le monde biologique et la société humaine. Un certain déterminisme est déjà acquis dans la science des atomes et dans les sciences de la vie : on demande si l'on ne rencontrera pas ici une limite au delà de laquelle aucun schème formel n'est plus applicable.

Observons d'abord que la question du progrès indéfini de la science dans toutes les directions se pose également dans la philosophie — que nous écartons — d'un univers réalisant rigoureusement un système formel. KANT insiste dans sa *Critique du Jugement* sur cette idée, qu'univers de cette sorte n'est pas nécessairement intelligible. Il ne suffit pas que l'ordre existe au fond ; il faut encore que l'ordre de l'apparence se prête à l'activité intellectuelle. Il y aurait déjà, dans cette observation, de quoi justifier une conception empirique de la probabilité de l'induction.

Notons aussi qu'à notre point de vue de l'hétérogénéité radicale du formel et du réel, la légalité scientifique ne se rapporte pas à l'essence du réel. Il en résulte que la loi ne saisit jamais adéquatement le comportement et que la réalité peut bien être dans son fond spontanéité et durée créatrice. Nous ne rencontrons pas ce conflit entre la légalité scientifique et la personnalité humaine, que le rationalisme ancien était incapable de surmonter.

La croyance en la possibilité essentielle d'un progrès indéfini de la science dans toutes les directions ne rencontre donc pas d'obs-

tacle. En fait, elle dérive d'une induction extrêmement remarquable. Le schème formel, c'est ici l'idée d'un schème formel quelconque ; l'application de ce schème, c'est surtout la découverte scientifique ; les applications effectives sont les conquêtes variées dont l'histoire de la science nous offre le spectacle ; les applications logiquement induites sont les conquêtes futures également variées. La croyance en l'applicabilité, en général d'autant plus vive que la fréquence de l'application est plus grande, atteint ici le niveau le plus élevé. Elle est, au fond, la croyance en la raison : elle est la raison même. Du point de vue scientifique, il ne s'agit de rien d'autre quand nous disons que toute chose a sa raison d'être ou encore que toute chose a une cause ou que tout phénomène est régi par des lois.

Après avoir exposé à grands traits la théorie de la correspondance du formel au réel, nous avons porté notre attention sur deux points essentiels de cette théorie : la probabilité de l'induction et l'universalité du domaine de la science. Nous allons enfin examiner un troisième point : la complexité des schèmes formels mis en rapport avec le réel.

Nous l'avons observé déjà, la philosophie de Hume est remarquable, à notre point de vue, par son étude du mécanisme psychologique reliant, en matière d'induction et de légalité, la croyance à la fréquence. Mais voici sa faiblesse : elle ne donne pas de l'induction elle-même et de la causalité, une idée satisfaisante parce qu'elle ne met pas en évidence le schème formel qui s'y rattache. Plus rigoureusement, elle s'en tient au schème élémentaire de la réunion de deux ou plusieurs éléments, qui est celui des prédicats et des classifications, celui aussi dont l'utilisation illusoire était représentée par les idées de substance et d'attribut. En fait, la logique de Hume créa le plus grand malaise : on avait conscience qu'elle était une expression insuffisante d'une vérité de première importance. Après Hume il était nécessaire que la spéculation se portât sur le point qu'il avait négligé : les schèmes formels utilisés par la science dans la compréhension du réel, en dehors du schème de la simple liaison des éléments. Et c'est ce mouvement que représente la philosophie de Kant. L'idée maîtresse est ici que les schèmes sont créés par l'esprit : mais elle se présentait sous un jour tel que les mathématiciens mêmes qui, au siècle suivant, réussissaient à transformer les schèmes fondamentaux de la géométrie et

de la mécanique pouvaient croire qu'ils sapaient les formes *a priori* de KANT. Or, en insistant sur le fait que nous ne vérifions jamais une loi directement, mais à travers un système formel complexe, en affirmant que nous confrontons avec l'expérience, non pas telle loi mais en réalité tout un ensemble de schèmes formels, DUHEM fit beaucoup pour éclaircir ce qui était resté confus chez KANT et pour transposer, si l'on peut dire, la logique kantienne, du plan transcendantal au plan scientifique. POINCARÉ jette la plus vive lumière sur la question en substituant aux formes *a priori* de KANT, les systèmes formels conventionnels. Finalement, on revient à l'empirisme de HUME mais on le complète par la logique de l'utilisation des schèmes formels.

En définissant l'induction comme une inférence par laquelle l'intelligence passe de l'application effective d'un schème formel dans une série de cas concrets semblables à un cas concret nouveau, ressemblant à certains égards aux précédents, nous nous sommes placés au point de vue où se place toute science. Nous demeurons dans la région des plus hautes généralités de la logique en introduisant ici l'idée de schème formel au lieu de l'idée de simple assemblage de deux ou plusieurs éléments. Toute connaissance scientifique est plus ou moins théorique ; elle met en œuvre un système formel plus ou moins complexe. Les sciences comme la géométrie, la mécanique et la physique utilisent, pour leurs schèmes, des conceptions de mathématique pure comme la théorie des formes algébriques et le calcul infinitésimal ; elles donnent lieu à des développements formels considérables : elles sont ainsi un exemple remarquable pour la question qui nous occupe. Et il est dans l'ordre des choses que les mathématiciens s'intéressant à la physique aient été les premiers à résoudre le problème du rôle du formel dans la connaissance du réel. Mais ceci est du plus haut intérêt, que le résultat de leurs spéculations concerne toute connaissance scientifique et, par conséquent, la logique même.

Nous reconnaissons que l'induction contient finalement l'affirmation que, dans telle situation concrète, à certains caractères concrets seront joints tels autres caractères concrets, comme il en fut dans d'autres cas semblables et qu'elle met en œuvre le simple schème formel de la réunion de plusieurs éléments. Mais dans toutes les sciences, la liaison formelle en question est généralement rattachée à un système formel complexe : elle en est déduite. Le sys-

tème formel complexe est essentiellement en jeu dans l'induction : l'inférence principale concerne l'applicabilité de ce système et non l'applicabilité du simple schème de la réunion. Nous ne disons pas que les principes les plus élevés des systèmes formels sont ici en question, mais que du moins certains concepts complexes, certaines grandeurs qui figurent dans ces systèmes sont toujours visés : ils sont, peut-on dire, plus proches de l'expérience. En d'autres termes, dans l'induction, ce n'est pas aux données immédiates que nous pensons : nous ne prévoyons pas leur liaison selon le simple schème de la réunion mais selon le schème complexe où nous espérons les insérer, l'insertion étant entendue ici au sens d'une correspondance entre la diversité du réel et la diversité du formel.

L'appareil formel de la connaissance scientifique, envisagé du point de vue de l'application à un cas concret, présente ainsi une série d'étages. A la base, on trouve les systèmes de postulats ; à mi-hauteur des relations extrêmement générales ; vers le haut une grande variété de relations particulières ; et finalement une profusion de relations simples unissant simplement à tels éléments, tels éléments. En bas, ce sont, par exemple, des équations intégrales ; au-dessus, on trouve des équations différentielles ; plus haut, les relations finies qui les intègrent ; à l'extrême, on ne trouve plus que le schème de la réunion de plusieurs éléments ou cette simple formule : telle collection d'éléments est toujours accompagnée de telle autre collection. Le mouvement vers le haut est, en somme, déductif ; le mouvement vers le bas, vers les axiômes, les conventions fondamentales dont tout le système dérive, relève d'une opération où une certaine latitude est laissée à l'intelligence, à raison déjà de l'approximation tolorée dans l'ensemble : cette opération est parfois appelée une induction. Cette induction formelle vise l'élaboration d'un système formel ; elle n'a rien de commun avec l'induction proprement dite, qui vise directement le rapport du formel au réel ; toutefois les deux opérations peuvent s'enchaîner.

Maintenons l'image de l'édifice formel avec sa base axiomatique et sa région supérieure où se formulent de simples relations immédiatement contrôlables dans le fait. Le génie formel part de cette dernière région et construit, si l'on peut dire, de haut en bas, des extrêmes conséquences aux axiomes fondamentaux. On dispose ici de toutes les ressources de la science formelle, on utilise le formel construit ou explicite et le formel abstrait ou implicite. Le

mouvement descendant s'accompagne sans cesse de déductions qui ramènent aux régions supérieures. L'élaboration du système formel apporte ainsi à l'expérimentation un programme. Le seul désir de coordonner est l'occasion de recherches expérimentales auxquelles, autrement, on n'aurait pas songé et il n'est pas rare que ces recherches proposées par le théoricien attentif au perfectionnement de l'appareil purement formel de la science aboutissent à une grande découverte. Au cas le plus fréquent, les expériences confirment, précisent ou écartent. Le progrès de l'ensemble vers la forme axiomatique se poursuit donc sous le contrôle expérimental. Or, indépendamment de cette poursuite et du système finalement construit, la science continue ailleurs ses investigations. Il est donc possible qu'une discordance se révèle à un certain moment entre le système et les faits. Le système ne doit pas être tenu pour définitif à raison de sa cohérence. Il peut être opportun d'y faire des retouches et même de le remettre entièrement en question.

La refonte entraîne parfois celle des postulats. L'idée de la substitution d'un groupe d'axiomes à un autre ne soulève aucune difficulté. Il ne s'agit pas ici des fondements de la science générale du formel, mais bien des relations dont on peut faire dériver un ensemble de relations données. Dans la science purement formelle, les postulats sont un point de départ arbitraire : de même, en un certain sens, dans les systèmes formels appliqués au réel. L'évidence qui s'attache aux axiomes des sciences physiques et autres sciences de la nature ne doit pas nous retenir d'en adopter d'autres, car elle n'est, au fond, que l'évidence du raisonnement qui rattache à ces axiomes les relations données. Toute la difficulté que l'on peut trouver ici provient d'une confusion. Il faut nécessairement atteindre à la vision nette de la ligne de démarcation entre le formel et le réel, pour être en état de se dégager de certains axiomes. A défaut de quoi l'on confondra toujours l'évidence de la cohésion qu'ils établissent entre certaines relations formelles applicables au réel et l'évidence trompeuse qui les rapproche des fondements de la science générale du formel.

La science tend à saisir le réel dans des cadres formels : elle ne suppose pas que le réel est du formel objectivé. Instruits par l'heureuse mobilité de la science, la plupart des savants en conviennent aujourd'hui. Quelques-uns, parmi les plus grands, inclinent à penser qu'au fond pourtant le monde est la réalisation d'un système for-

de la mathématique pure ; mais visiblement elle dépend aussi de la diversité des principes dans la science du réel. A cette diversité des principes, répondent les idées de richesse du réel et de pluralisme. Enfin, rien ne nous impose absolument les principes : ni l'évidence, ni la raison, ni l'expérience. D'ailleurs, ils ne sont pas nécessairement simples. Ils ne doivent même pas revêtir cette simplicité supérieure qui donne tant de vraisemblance, comme remarque EINSTEIN, aux axiomes des théories relativistes et, pourrait-on ajouter, à ceux de la mécanique quantique.

Une remarque encore avant d'aborder la série des principaux schèmes. L'importance exclusive accordée au schème des classes logiques et aux schèmes formels en rapport avec l'idée de grandeur (continue) favorise une fausse image de l'ordre dans la nature. On croit à une dualité, à une césure. On voit d'une part les théories utilisant la logique au sens étroit et d'autre part les théories concernant les grandeurs. On perd de vue ce domaine extrêmement riche de la science du formel, où l'on ne fait appel ni au continu, ni même à l'ensemble dense des nombres rationnels, et qui comprend notamment l'analyse combinatoire, la théorie arithmétique de la divisibilité, des congruences, des champs de Galois, et une région immense de la théorie des groupes. Or la logique des prédicats n'est qu'un problème d'analyse combinatoire ; d'autre part, l'analyse combinatoire et arithmétique est à la base de l'analyse continue ; et, du reste, les applications naturelles directes du domaine en question sont variées. En donnant à ce domaine toute son importance on obtient donc, de l'ordre dans la nature, une représentation non seulement plus complète mais plus profonde et plus liée.

Le schème le plus simple est celui d'un ensemble d'éléments, où l'on envisage différents domaines pouvant empiéter. Ces domaines x, y, z... et leurs compléments X, Y, Z... déterminent pour chaque élément des symboles x', y', z'... exprimant l'appartenance de l'élément aux domaines envisagés : ce sont les prédicats, les caractères (positifs ou négatifs). A la combinaison des prédicats répond la multiplication des domaines au sens de BOOLE. Le schème présente ainsi le type le plus fréquent du concept, sous les deux aspects de la compréhension et de l'extension. La logique des prédicats et des classes est véritablement un problème d'analyse combinatoire. Si, en fait, on ne l'envisage pas ainsi, c'est pour plusieurs raisons qui ne vont pas à l'essence des choses. Il y a d'abord la simplicité

du problème et l'étendue de ses applications. Il y a ensuite cette circonstance qu'on examine assez rarement, dans la logique des prédicats et des classes, le dénombrement des cas possibles, alors qu'inversement, en analyse combinatoire, le dénombrement retient l'attention beaucoup plus que la nature de l'agrégat.

L'utilisation du schème des prédicats dans la représentation de la nature est extrêmement variée. On fait déjà usage de ce schème dans une induction réelle quelconque : il s'agit toujours finalement de l'applicabilité du schème de deux prédicats *a*, *b*, avec l'exclusion de (*a*, non-*b*). La causalité simple dérive aussi du schème de deux prédicats. Ici *a* et *b* sont ordonnés et l'ordre est, dans l'application, chronologique : dans la causalité efficiente *a* précède *b* ; dans la causalité finale, c'est l'inverse.

Le schème des classifications ordinaires est celui des prédicats ordonnés. Le premier caractère est pris positivement ou négativement ; le second, joint au premier, donne quatre possibilités suivant les deux signes, et ainsi de suite. Les incompatibilités des prédicats (classes correspondantes sans éléments communs) amènent des simplifications mais une idée plus complexe de l'ordre de succession des caractères. Ainsi, au lieu de la simple bifurcation correspondant à la présence ou à l'absence d'un caractère, on peut avoir une ramification multiple correspondant à l'alternative de quelques caractères. L'ordre des prédicats concerne alors une file de prédicats compatibles dans la série rameuse : les différents prédicats formant une alternative ne présentent pas nécessairement un ordre. Dans les classifications des sciences naturelles — biologie, pétrographie — l'ordre de succession des prédicats dépend du choix d'un point de vue et définit une sorte de poids. Ainsi, la recherche d'un point de vue convenable pour la classification des êtres vivants a conduit à l'idée de leur classification naturelle. Notons que cette idée a mis sur la voie de la théorie évolutive de la vie : l'ordre d'importance des caractères compatibles parut répondre, dans la classification naturelle, à l'ordre chronologique de leur apparition et la série rameuse qu'elle présentait devint l'image d'une filiation chronologique avec différenciations successives ; en même temps, le fait qu'une certaine continuité des types obligeait à multiplier indéfiniment les prédicats de la classification fut interprété comme le signe d'une certaine continuité chronologique corrélative.

Sans quitter l'analyse combinatoire, passons à des concepts

plus complexes figurant dans les fondements des sciences de la nature. L'analyse combinatoire conçoit des classes d'agrégats, des ensembles complets d'agrégats d'une classe donnée et, dans un ensemble complet, des ensembles définis, chacun, par la condition que tous ses agrégats représentent le même aggrégat d'une classe donnée. Elle établit pour ces ensembles, des dénombrements. Dans le dernier cas, il s'agit de dénombrements relatifs : relatifs en ce sens que chaque ensemble partiel est comparé à l'ensemble fondamental ; relatif surtout parce que les ensembles partiels sont comparés entre eux. Les dénombrements relatifs sont fonctions de variables entières : des démarches familières au mathématicien permettent de passer, si l'on désire, à un dénombrement relatif fonction de variables continues, à un dénombrement densitaire.

La classe des agrégats qui a servi à définir, dans l'ensemble fondamental, des ensembles partiels peut être utilisée à former arbitrairement — indépendamment de l'ensemble fondamental —, un ensemble présentant chaque agrégat un certain nombre de fois. Nous aurons ici aussi un dénombrement relatif : il est exceptionnel que ce dénombrement relatif soit précisément représenté par les mêmes nombres qu'un dénombrement relatif opéré dans un ensemble fondamental, au sens ci-dessus. Or c'est pourtant ce qui arrive, avec la régularité d'une loi scientifique dans certains domaines : les formules issues de la considération d'un ensemble fondamental donnent alors les lois statistiques effectives des phénomènes ou du moins, après déduction, les lois de certains phénomènes au fond statistiques. Ainsi, pour certains jeux de hasard ; ainsi également pour la thermodynamique des gaz et du rayonnement.

On envisageait autrefois en thermodynamique, des distributions densitaires dans l'extension en phase : des probabilités continues. Planck montra que la loi du rayonnement thermique, qu'on s'efforçait vainement de rattacher aux probabilités continues, s'expliquait sans passage aux dénombrements densitaires moyennant l'hypothèse des quanta d'action : sa théorie fut l'origine des théories quantiques. On fonde aujourd'hui la thermodynamique des gaz comme celle du rayonnement sur la base des distributions discontinues en rapport avec les ondes en résonance avec l'enceinte, ondes lumineuses ou brogliennes. Ajoutons que l'ensemble fondamental où l'on forme les ensembles partiels n'est plus celui que l'on envi-

sageait dans les principes de l'ancienne théorie cinétique des gaz. D'abord, on part de l'idée de distribution des particules entre les états et non de plus de l'idée de la réalisation par telle particule de tel ou tel état : c'est ainsi qu'on obtient la statistique de Bose-Einstein, valable pour les photons. Ensuite, à raison du principe de Pauli — qui concerne les électrons et les particules matérielles — certains termes de l'ensemble fondamental sont écartés : c'est sur cette base qu'est édifiée la statistique de Fermi-Dirac, dont on déduit la thermodynamique des gaz et la théorie de certains caractères thermiques des métaux. Ceci surtout importe, à notre point de vue : les probabilités discontinues sont maintenant entrées dans les fondements de la physique ; et en même temps, une certaine latitude dans la conception de ce que nous avons appelé l'ensemble fondamental.

Afin de circonscrire le domaine des applications statistiques de l'analyse combinatoire, nous devons noter ce qui suit : la physique envisage aujourd'hui — notamment en mécanique quantique générale — des lois statistiques qui ne dérivent pas de la considération d'un ensemble fondamental. Prenons, pour fixer les idées, le cas des probabilités continues. Au point de vue défini plus haut, la distribution densitaire est l'expression limite d'un dénombrement relatif opéré dans un ensemble fondamental, systématiquement construit selon l'analyse combinatoire. Il est clair que tout dénombrement densitaire n'est pas de cette sorte. La distribution canonique en phase, définie *a priori* par Gibbs — en mécanique statistique — est déductible de postulats concernant un ensemble fondamental : domaines d'égales probabilités, probabilité d'une distribution, probabilité maxima, passage à la limite. Mais les amplitudes de probabilité de la mécanique quantique ne sont généralement pas ainsi déductibles : elles ne le sont guère que pour les systèmes gazeux, matériels, électroniques ou photoniques. Toutefois, dans le cas plus général d'un ensemble de particules semblables réagissant mutuellement, l'analyse combinatoire joue encore un rôle dans la formation de l'onde statistique, vu les conditions d'invariance de l'onde pour les permutations particulaires formant un certain groupe de Galois, le groupe symétrique, l'antisymétrique ou un autre.

Nous signalerons maintenant un schème formel, purement combinatoire et arithmétique comme les précédents, et qui figure dans la théorie nouvelle de la filiation des atomes chimiques. Consi-

dérons des éléments représentant, chacun, un système de nombres entiers ou, si l'on préfère, des éléments notés par un système d'indices : on a ainsi un ensemble à plusieurs dimensions, dont les coordonnées sont entières. Dans cet ensemble, on peut également envisager un ordre simple, à un seul indice, particulièrement un ordre périodique comme celui des ensembles de chiffres représentant les nombres successifs dans un système de numération de base quelconque.

Or, l'atome chimique est représenté par un damier complexe dont les cases ont quatre indices. Nous laissons ici de côté le lien de ces indices avec la mécanique quantique de l'atome : les quatre indices seraient sans doute conservés même s'il fallait abandonner les théories mathématiques qui les ont introduites. Si l'on envisage la suite des éléments chimiques depuis l'hydrogène jusqu'à l'uranium, on trouve que le passage d'un élément au suivant correspond à l'introduction d'un nouvel électron dans le damier complexe. Or, les électrons viennent se placer dans les cases dans un ordre représenté, sauf quelques exceptions, par la loi multipériodique que nous venons de définir. Dans l'ordre d'importance décroissante, les indices sont notés n, l, m, s : ce sont l'indice quantique total, l'indice azimutal, variant de o à n-1, l'indice correspondant à la quantification dans l'espace ou indice magnétique et l'indice concernant les deux sens de la rotation propre de l'électron. Ainsi, à mesure que les électrons arrivent, ils vont se caser de manière à n'amener les changements d'un indice que si les indices moins importants ont atteint leur valeur maxima. Cette règle souffre une exception. Ainsi, on passe à $n = 4$ avant que les casiers pour lesquels on a à la fois $n = 3$ et $l = 2$ aient été occupés. Il y a un retard dans l'amorçage de l'occupation des casiers dont l'indice l est 2 (triades et éléments qui précèdent) ; un retard plus grand concernant l'indice $l = 3$ (terres rares) ; l'indice l n'atteint jamais la valeur 4. Vu ces retards concernant l, on a, en fait, une loi de distribution successive dont la périodicité est un peu altérée.

Nous avons laissé de côté la déduction des quatre indices à partir des principes de la mécanique quantique de l'atome. Mais indépendamment du système formel complet, nous pouvons rattacher ces quatre indices aux phénomènes. Les propriétés de l'atome chimique dépendent de la manière dont normalement tous ses électrons — abstraction faite de ceux du noyau — sont distribués

dans le damier complexe dont les cases ont quatre indices. La loi de périodicité de l'occupation des cases par les électrons successifs est donc aussi une loi de périodicité des propriétés de la série des atomes chimiques. Si nous portons particulièrement notre attention sur l'indice n, nous obtenons le tableau de MENDELEJEF et sa signification pour la périodicité des propriétés. Pour un atome donné, les cases d'indice n maximum sont conçues par les chimistes comme formant une dernière enveloppe de l'atome ; les électrons de cette enveloppe jouent naturellement un rôle important dans les combinaisons chimiques : ce sont les électrons de valence.

Nous devons signaler aussi l'usage des quatre indices en spectroscopie. Il ne s'agit plus ici de l'occupation normale des cases par les électrons mais du saut d'un électron d'une case dans une autre. Une raie de spectre en série est, conformément à cette idée, notée par deux systèmes de quatre indices.

Nous nous sommes interdit jusqu'ici d'envisager en première ligne les systèmes où figure le continu, donc la grandeur extensive, cinématique ou intensive. Tout système formel exprimant les propriétés de l'espace repose nécessairement sur l'idée du continu mathématique : si le système est abstrait, la démonstration d'existence des éléments définis fera nécessairement appel à cette idée. Toutefois, si un système n'exprime pas toute la base de la géométrie, il peut se présenter sous une forme abstraite telle que la démonstration d'existence sera purement arithmétique. Ainsi, par exemple, la théorie des polyèdres réguliers fait dépendre leur existence de de celle d'un groupe fini d'opérations. Ces opérations se présentent d'abord comme des transformations cartésiennes : elles introduisent ainsi le continu dans les coefficients aussi bien que dans les coordonnées. Mais on peut ne retenir que le groupe abstrait isomorphe, avec ses opérateurs fondamentaux abstraits satisfaisant par définition à des relations analogues. L'existence même des groupes abstraits correspondant aux différents polyèdres réguliers est démontrée arithmétiquement, sans appel au continu, par la théorie des groupes linéaires dans un domaine congruenciel. D'une manière générale, l'ordre attaché à certains systèmes de points géométriques est exprimable par des systèmes purement formels sans rapport nécessaire avec le continu mathématique. A raison de cette circonstance, nous pouvons, à cette place — avant d'aborder les schèmes continus — considérer un type de système formel

qui intervient d'une manière essentielle dans l'ordre géométrique de la nature.

Envisageons le schème formel en question sous son aspect géométrique. Il s'agit de ces systèmes de points dont l'ordre se définit par des conditions d'alignement et d'équidistance, de parallélisme, de symétrie axiale d'un ordre quelconque, de symétrie relative à un centre ou à un plan, et autres conditions discontinues semblables. Le schème ainsi figuré joue un rôle considérable dans la représentation de la structure de la matière, particulièrement celle de la structure en atomes. On le rencontre dès que la formule chimique cesse d'être une formule brute. Il s'affirme avec la stéréochimie. On en trouve un nouvel usage dans la représentation des molécules complexes. Le schème des réseaux ponctuels, déjà utilisé dans l'étude des symétries cristallines apparentes a son application la plus remarquable dans la structure des cristaux en atomes, telle qu'elle nous est révélée par la diffraction des ondes suffisamment petites, rayons X et ondes brogliennes.

En conclusion de cette première partie, consacrée aux systèmes formels strictement combinatoires et arithmétiques — ne présentant pas le continu —, nous pourrions dire, portant cette fois notre attention non plus sur des types de schèmes mais sur le réel, que des systèmes de cette sorte figurent dans notre représentation de l'ordre de la nature, en des endroits vraiment essentiels : l'image abstraite de l'atome, la structure de la molécule et des cristaux, la constitution statistique des gaz et du rayonnement thermique, la série rameuse des êtres vivants. Nous allons maintenant passer aux systèmes formels continus.

Le continu arithmétique n'est jamais requis pour exprimer l'ensemble des états d'une grandeur réelle. Vu le caractère évanouissant de la différenciation dans la continuité qualitative, soit extensive, soit intensive, l'ensemble des nombres rationnels — même avec limitation à un dénominateur fixe — suffit. Le continu mathématique est uniquement exigé par la nature des systèmes formels où la grandeur est appelée à figurer : dès qu'elle est introduite comme variable dans une relation analytique non linéaire, il est nécessaire de faire appel au continu arithmétique pour la représenter. D'une manière générale, les grandeurs diverses sont précisément définies par les principales équations où elles figurent. La relation des grandeurs physiques avec l'espace ramène leur mesure à une mesure

géométrique, et celle-ci à son tour utilise les équations des déplacements solides, ce qui écarte autant qu'il est possible les estimations intuitives.

Maintenant, si la nature d'une grandeur physique dépend à ce point des équations où elle figure, nous devons faire immédiatement une distinction essentielle. Généralement, en opérant sur la grandeur, plus précisément sur l'ensemble arithmétique continu qui lui correspond, une transformation continue avec l'aide d'une fonction toujours croissante, on altère profondément la forme des relations où elle se présente : par exemple, une relation de proportionnalité devient une relation quelconque. On s'en tient alors à la graduation pour laquelle les équations sont le plus simples. On a ainsi affaire à une graduation métrique : une autre exprimait seulement un ordre de succession comme un indice mais qui serait continu ; celle-ci exprime davantage, ce qui est frappant dans le cas de l'extensif où l'on peut parler de l'égalité des parties correspondant à l'égalité arithmétique des intervalles. Mais toutes les grandeurs ne sont pas métriques au sens ci-dessus. Il arrive qu'une transformation continue de la graduation à l'aide d'une fonction toujours croissante n'altère pas profondément la forme des relations. Ainsi, pour la graduation de la température, dans la simple étude de l'équation caractéristique des corps. Toutefois, dans cet exemple, l'arbitraire de la graduation tient au fait que l'on n'a pas envisagé certaines relations fondamentales où figure la température : les équations de la thermodynamique contiennent une fonction arbitraire de la température qui devient une fonction linéaire pour une graduation convenable ; cette graduation s'impose et la température est alors une grandeur métrique. Il existe pourtant des grandeurs qui essentiellement ne sont pas métriques: ce sont les coordonnées de l'espace-temps dans la théorie de la relativité générale. Une transformation continue quelconque des coordonnées n'altère pas les équations fondamentales, pourvu, bien entendu, que l'on opère une transformation corrélative des autres grandeurs (covariance et contrevariance des tenseurs). Dans des cas particuliers, les équations infinitésimales et surtout les relations finies qui les intègrent peuvent être simplifiées par un choix convenable des coordonnées ; elles redeviennent métriques au sens que nous venons de dire : mais outre qu'elles ne représentent pas la métricité de l'espace, il ne s'agit plus ici des principes de la science.

Concernant la question de savoir s'il existe dans le réel des grandeurs répondant aux variables continues diverses figurant dans les systèmes formels principaux en usage dans la science de la nature, nous ferons observer ce qui suit et qui résume ce que nous avons dit à ce sujet en traitant du réel puis du rapport du formel au réel. La réalité qui s'offre immédiatement à nous dans l'intuition sensible nous présente des totalités qualitatives dont un aspect primordial est la continuité extensive — spatiale et temporanée — et des continuités qualitatives en extension dans l'espace et dans le temps. Nous admettons que la réalité hors du champ de conscience est, au fond, pareille à cette donnée immédiate. Elle présente, aux différentes échelles, une continuité extensive dont la différenciation est plus ou moins poussée, des continuités qualitatives diverses en extension et dans celles-ci, des permanences localisées, comme celles que nous présentent déjà les corps et les mobiles de l'intuition sensible. La continuité réelle est représentable par la variable mathématique continue ; la correspondance n'est pas rigoureuse : nous avons précisé ce point. Mais sauf cette réserve, la réalité immédiate dans le champ de conscience et hors du champ de conscience appelle bien les idées physicomathématiques d'espace, de champ physique et de mobile. D'autre part, la confrontation des systèmes formels et du réel ne porte que sur les éléments formels concernant ce que nous pouvons manipuler : c'est ici le principe de la mesure de toutes les grandeurs des systèmes formels par les déplacements solides, grâce à des transformations techniques diverses avec transposition et agrandissement. A quoi il faut ajouter que nous imaginons principalement le réel aux échelles inaccessibles par les systèmes formels, mais en quelques cas seulement : par exemple, la représentation particulaire et la représentation ondulatoire. D'une manière générale, le physicien se montre aujourd'hui très réservé sur la question de la réalité des grandeurs qu'il introduit dans les systèmes formels : il s'en tient pour ainsi dire uniquement à ce qui se déduit des systèmes formels pour les éléments concernant les conditions techniques de l'expérience. Mais une attitude intransigeante en cette matière est insoutenable.

Après ces généralités sur l'idée de grandeur continue, nous allons examiner quelques schèmes formels figurant dans les principes de la science de la nature et qui présentent le continu mathématique.

Voici d'abord un schème qui établit une sorte de relation entre

le discontinu et le continu. Une grandeur essentiellement continue est considérée, dans le schème, comme une fonction d'une variable entière ou d'un système de variables entières. Il s'agit là, peut-on dire, du schème fondamental de la chimie et de la physique quantique. On a, du côté des variables entières, des nombres représentant soit le numéro atomique, soit le numéro de la période ou de la colonne dans le tableau de Mendelejef, soit un indice prenant trois valeurs correspondant aux états solide, liquide ou gazeux, soit le numéro d'ordre dans une suite de composés successifs d'un même type dans la chimie du carbone, soit enfin les quatre indices quantiques relatifs à l'état d'un électron dans l'atome. Et du côté de la variable continue, on trouve soit un coefficient caractéristique du corps dans les phénomènes apparents — densité, coefficient d'élasticité, de viscosité température ou pression de transformation, pouvoir diélectrique et ainsi de suite, soit une grandeur inaccessible comme le diamètre naturel de l'ion, soit encore des niveaux d'énergie dans un même atome pour les diverses valeurs des quatre indices quantiques. Les fréquences des séries spectrales se déduisent immédiatement des niveaux d'énergie pour deux systèmes de quatre indices ; du reste, les intensités des raies sont des fonctions des deux systèmes et se présentent donc comme des matrices. Ainsi, une relation du type ici en question se rencontre dans la marche des propriétés quand on parcourt les différentes espèces chimiques dans un ordre déterminé ; et elle se présente également dans l'expression des caractères d'un même élément, qui sont en rapport avec l'état quantique ou le changement d'état quantique.

Passons à l'idée de relation continue entre deux grandeurs. Le cas le plus remarquable est celui d'une grandeur intensive fonction soit du point, soit de l'instant, soit des deux à la fois. On a ainsi l'idée première de champ physique. Des complications naissent avec le caractère vectoriel ou tensoriel de la grandeur intensive : c'est là une question en rapport avec la nature de l'espace. Un autre cas également remarquable est celui des coordonnées de l'espace fonctions du temps. Les coordonnées en question sont d'abord celles d'un point caractérisé par une permanence c'est-à-dire celles d'un point mobile. Considérant ensuite un système de mobiles ponctuels tous semblables, on peut envisager une distribution statistique définie par l'idée d'un champ de distribution densitaire, celle d'un champ de déplacement ou de vitesse et l'équa-

tion dite de continuité ou de conservation reliant nécessairement ces deux champs. Enfin, le cas d'une relation entre deux grandeurs dont aucune n'exprime une coordonnée spatiale ou temporanée est celui, par exemple, du potentiel thermodynamique ou de l'entropie comme fonctions — pour un corps déterminé — de la température et de la densité. La détermination des fonctions continues de champ, de mouvement ou autres, ici en question, à partir d'un système d'axiomes est un des principaux objets de la théorie physique.

Nous avons uniquement considéré la relation entre variables continues comme un schème général. Mais si la science de la nature ne nous présentait pas des relations de forme analytique, il n'aurait pas été nécessaire de représenter les grandeurs par le continu mathématique : l'ensemble des rationnels aurait suffi. Venons donc immédiatement à la question des types analytiques de la relation entre grandeurs. D'abord le schème de la somme et celui du produit. Notons-les dans les axiomes des sciences du réel. On rencontre la somme des grandeurs continues, dans les équations suivantes : celle des translations, celle des forces, celle des travaux, celle de l'énergie, celle de l'action. On trouve le produit dans quelques expressions primordiales : celle des rotations euclidiennes, celle du travail, celle de l'action au sens de Lagrange et Hamilton. Notons aussi l'élévation à la seconde puissance dans l'invariant fondamental du groupe des rotations euclidiennes, ou dans les conditions d'orthogonalité de la transformation linéaire qui exprime ces rotations.

Dans les principes des systèmes formels de la science de la nature, on trouve également des schèmes proprement infinitésimaux, notamment la sommation intégrale et la dérivée. L'Antiquité n'a guère connu qu'une seule application naturelle d'un schème infinitésimal : c'est l'expression des longueurs d'arcs, des aires et des volumes. La Renaissance dégage clairement l'idée des schèmes infinitésimaux en même temps qu'elle découvre de nouvelles applications : la cinématique et surtout la dynamique. Aujourd'hui, les schèmes infinitésimaux se présentent dans des principes nombreux. Le cas où les variables d'intégration ou de dérivation sont extensives — temps ou espace — est le plus remarquable. On rencontre notamment la sommation intégrale dans l'expression du volume, dans l'équation lagrangienne de continuité, dans l'expression de l'action et donc dans celle du principe de moindre action.

Notons que des équations différentielles importantes de la physique mathématique sont déductibles d'un principe extrémal.

Les relations axiomatiques de la physique des champs et des mouvements ont un caractère imposé par la nature même de l'espace ou de l'espace-temps : elles sont invariantes pour les transformations d'un groupe. Le groupe des transformations définit l'espace ou l'espace-temps.

La science générale de l'ordre dans la nature — dont nous traçons ici l'esquisse — examine les principaux schèmes formels mis en œuvre dans le domaine axiomatique. Elle doit naturellement insister sur les systèmes analytiques représentant les différents types d'espace vu leur intérêt purement mathématique et le rôle primordial de la métricité spatiale dans la représentation du réel. Des raisons analogues l'obligent à envisager particulièrement le système formel de la mécanique quantique.

Le schème fondamental est ici la fonction de deux variables envisagée comme une matrice continue. La théorie des matrices ordinaires — discontinues et finies — la théorie des transformations linéaires et des formes quadratiques — que la géométrie analytique utilise déjà dans ses fondements — font place, vu le passage de l'indice discret à la variable continue, au schème de l'espace fonctionnel d'HILBERT, à un nombre infini de dimensions. Les grandeurs physiques pour lesquelles on utilise le schème de la matrice continue et du tenseur correspondant sont de deux sortes. Les unes sont les grandeurs quantiques : elles sont hermitiennes ; on s'intéresse particulièrement à leurs valeurs propres, aux éléments diagonaux du tenseur ramené à ses axes ; ces valeurs caractéristiques sont réelles. Les grandeurs de la seconde sorte sont les amplitudes : elles correspondent aux rotations hermitiennes de l'espace fonctionnel. L'amplitude concerne deux grandeurs quantiques : elle est la rotation amenant un tenseur sur l'autre : elle est donc, comme matrice, une fonction de deux variables, qui correspondent respectivement à la suite des valeurs caractéristiques de chacun des tenseurs. Il arrive généralement que les valeurs caractéristiques d'une grandeur définie, comme ci-dessus, par un tenseur hilbertien ne forment pas une suite continue : elles sont alors des fonctions de variables entières et constituent ainsi une grandeur quantique au sens premier du mot.

Ainsi, le système formel fondamental est tel que la physique

des quanta appartient à la physique des lois infinitésimales. Par exemple, les amplitudes sont, dans le cas des ondes brogliennes, des fonctions de variables continues (les coordonnées) et de variables entières (les indices quantiques des niveaux d'énergie). Une autre circonstance contribue également à donner aux schèmes de la mécanique quantique une place toute spéciale : la signification statistique des carrés d'amplitude.

On introduit ici un schème statistique uniquement pour rendre plausibles les équations qui relient aux opérateurs du système formel quantique fondamental — grandeurs quantiques et amplitudes — les grandeurs accessibles, comme l'intensité d'une raie du spectre ou celle du rayonnement diffusé dans une direction donnée. Par exemple, l'intensité de la radiation est rattachée à la probabilité d'un saut, elle-même rattachée à la probabilité d'un état. La grandeur quantique, plus précisément, la suite de ses valeurs caractéristiques acquiert alors une signification cinématique ou dynamique concernant les électrons d'un système mécanique conçu d'après l'hamiltonien utilisé pour construire le système formel fondamental. Le carré de l'amplitude relative à deux grandeurs quantiques représente — on le postule — la probabilité pour que, la seconde étant fixée, la première prenne une valeur donnée. La probabilité est ici entendue au sens d'une fréquence statistique dans un grand nombre de systèmes semblables. Parfois, on l'entend comme une fréquence statistique relative à un système unique envisagé pendant un intervalle de temps suffisant. Dans le premier cas, la statistique est spatiale, dans le second, elle est temporanée.

La loi de probabilité ne découle pas ici, comme on voit, d'un ensemble fondamental systématiquement construit selon l'analyse combinatoire. En général, il n'y a pas déductibilité. Nous avons signalé plus haut le rôle que continuait à jouer le calcul des combinaisons dans certains cas particuliers. Notons seulement à cette place que la non-déductibilité n'offre aucune difficulté spéculative du point de vue de la pure légalité, sinon, vu l'interférence des ondes de probabilité, quelques réserves concernant l'idée de permanence des systèmes mécaniques statistiquement dénombrés.

Dans le schème statistique primitif, on fixe la valeur de la seconde des deux grandeurs que concerne l'amplitude : alors le carré de l'amplitude — le carré de son module — donne la fréquence statistique d'une valeur de la première. Dans le schème d'incertitude

d'HEISENBERG, qui concerne deux grandeurs quantiques conjuguées, on ne fixe pas la valeur de la seconde grandeur mais on envisage une répartition statistique en cloche autour d'une valeur : dans ces conditions, la fréquence d'une valeur de la première grandeur — la conjuguée — n'est plus indépendante de cette valeur (comme il arrivait toujours pour les grandeurs conjuguées) : elle varie elle-même suivant une courbe en cloche. Or, la relation est telle qu'une cloche s'évase quand l'autre s'effile. Le produit des deux paramètres d'évasement présente cette même constante universelle h que l'on rencontre dans la relation de non-commutativité des grandeurs conjuguées. Or ceci est essentiel, qu'il est permis de considérer l'évasement des cloches non pas comme une distribution statistique des valeurs d'une grandeur quantique dans un ensemble de systèmes mais comme la mesure d'un seuil de différenciation dans un phénomène individuel. L'indétermination tiendrait ici, non pas au caractère de toute légalité statistique, mais à la nature de toute continuité réelle.

TABLE DES MATIÈRES

	Pages
INTRODUCTION	3
CHAPITRE PREMIER. — Le formel	10
CHAPITRE II. — Le réel	20
CHAPITRE III. — Le rapport du formel au réel	28
CHAPITRE IV. — L'ordre dans la nature	41

1101. — Imp. Jouve et Cie, 15, rue Racine, Paris. — 2-35

ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

PUBLIÉES SOUS LA DIRECTION DE MM.

Marcel PRENANT
Professeur à la Sorbonne
I. — BIOLOGIE ÉCOLOGIQUE
II. — LEÇONS DE ZOOLOGIE

A. REY
Professeur à la Sorbonne
HISTOIRE DES SCIENCES

Y. ROCARD
Maître de Recherches
THÉORIES MÉCANIQUES
(Hydrodynamique-Acoustique)

R. SOUEGES
Chef de Travaux
à la Faculté de Pharmacie
EMBRYOLOGIE
ET MORPHOLOGIE VÉGÉTALES

TAKAGI
Professeur à l'Université Impériale de Tokyo
MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

TAMIYA-(HIROSHI)
Membre du Tokugawa Biologisches
Institut-Tokyo
BIOLOGIE (Physiologie cellulaire)

A. TCHITCHIBABINE
Membre de l'Académie des Sciences
de l'U. R. S. S.
CHIMIE ORGANIQUE
(Série hétérocyclique)

Georges TEISSIER
Sous-directeur de la Station
Biologique de Roscoff
BIOMÉTRIE
ET STATISTIQUE BIOLOGIQUE

G. URBAIN
Membre de l'Institut
Professeur à la Faculté des Sciences
de Paris
THÉORIES CHIMIQUES

Pierre URBAIN
Maître de Conférences à l'Institut
d'Hydrologie et de Climatologie
de Paris
GÉOCHIMIE

Y. VERLAINE
Professeur à l'Université
de Liége
PSYCHOLOGIE ANIMALE

P. WEISS
Membre de l'Institut
Directeur de l'Institut de Physique
de l'Université de Strasbourg
MAGNÉTISME

R. WURMSER
Directeur du Laboratoire
de Biophysique
de l'Ecole des Hautes-Etudes
BIOPHYSIQUE

Actualités Scientifiques et Industrielles (suite)

Série 1935 :

213. FORÊT JEANNE. **Recherches sur les combinaisons entre les sels de calcium et les aluminates de calcium** .... 15 fr.
214. HIROSHI TAMIYA. **Le bilan matériel et l'énergétique des synthèses biologiques** .... 10 fr.
215. LOUIS VERLAINE. **Histoire naturelle de la connaissance chez le singe inférieur** .... 12 fr.
216. MARTIN BATTEGAY et LÉON DENIVELLE. **La cellulose** (deuxième partie) .... 16 fr.
217. ABEL REY. **Les mathématiques en Grèce au milieu du V^e siècle** .... 18 fr.
218. HÉLÈNE METZGER. **La philosophie de la matière chez Lavoisier** .... 10 fr.
219. G. BOULIGAND, C. GIRAUD et P. DELENS. **Le problème de la dérivée oblique en théorie du potentiel** .... 18 fr.
220. ERRERA JACQUES. **Le moment électrique en Chimie et en Physique : Généralités et Méthodes** .... 14 fr.
221. ERRERA JACQUES. **Le moment électrique en Chimie et en Physique : Moment électrique et structure moléculaire** .... 15 fr.
222. Y. ROCARD. **Propagation et absorption du son** .... 15 fr.
223. JEAN-LOUIS DESTOUCHES. **Le rôle des espaces abstraits en Physique nouvelle.** 18 fr.
224. JULIEN PACOTTE. **La logique et l'empirisme intégral** .... 12 fr.
225. H. MINEUR. **Dénombrements d'étoiles. Catalogue d'étoiles. Comparaison des séquences** .... 15 fr.
226. HANS HAHN. **Logique, Mathématiques et connaissance de la réalité** .... 10 fr.

Liste complète à la fin du volume

702. — Imprimerie Jouve et Cie, 15, rue Racine, Paris. — 2-1935